تمـــارين محـــلـــولــة

تمرين 1

لعبة (Tiercé) هي لعبة سباق الخيل وتتمثل هذه اللعبة في اختيار 3مشاركين في السباق لاحتلال المراتب الثلاثة الأولى .

إذا كان عدد المشاركين في السباق هو12 ، أحسب الاحتمال لكي لاعب هذه اللعبة يربح (Tiercé) :

أ- في الترتيب الذي يطابق ترتيب نتيجة السباق .

ب- في الترتيب المخالف لترتيب نتيجة السباق .

تمرين 2

لعبة يانصيب تحتوي 100ورقة منها 3 أوراق تعطي ربح جوائز كبرى و12 ورقة تعطي ربح جوائز صغرى .

اشترى رجل 3 أوراق ، أحسب احتمال الحوادث الآتية :

1) الحادثة A : الرجل لايربح أية جائزة . الحادثة B : يربح الرجل 3 جوائز . الحادثة C : يربح الرجل جائزتان كبريان .

2) نفرض أن هذا الرجل قد ربح 3 جوائز ، ما هو الاحتمال كي تكون اثنتان منهما كبريان . 3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الجوائز الكبرى الذي قد يربحها هذا الرجل .

أعط قانون المتغيرX .

تمرين 3

نرد مزيف حيث كل وجهين يحملان نفس الرقم i حيث $i \in \{1;2;3\}$

نرمز بـ : z, y, x الاحتمالات التي تمثل على الترتيب ظهور الوجه الذي يحمل الرقم 1، 2، 3 . 1) أحسب z, y, x علما أن هذه الأعداد هي متناسبة على الترتيب مع 2، 3، 5 . 2) نرمي هذا النرد مرتين على التوالي وليكن a الرقم الذي يظهر على وجه النرد في الرمية الأولى

وليكن b الرقم الذي يظهر في الرمية الثانية .

أحسب احتمال الحصول على كل ثنائية $(a;b)$.

3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي 1إذا كان $(a+b)$ من مضاعفات 3 ويساوي 2 إذا كان $a+b=4$ ويساوي 3 إذا كان $a-b=0$. حدد قانون المتغير العشوائي X .

تمرين 4

إذا كان احتمال نجاح صالح وأحمد في البكالوريا هو على الترتيب $\frac{1}{3}$ و $\frac{3}{4}$ ، أحسب الاحتمالات الآتية :

أ- أن ينجح الاثنان في البكالوريا .

ب- أن ينجح واحد منهما على الأقل.

تمرين 5

لدينا نردان A و B . النرد A مغشوش وله كل وجهين يحملان نفس الرقم i حيث $i \in \{1;2;3\}$. نرمز بـ p_i لاحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم i . 1- أحسب p_1, p_2, p_3 علما أنها تشكل 3 حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$. النرد B ليس مغشوشا وله كل ثلاثة وجوه تحمل نفس الرقم k حيث $k \in \{1;2\}$.

نرمز بـ p'_k لاحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k

2- أحسب p'_1, p'_2 . 3- نرمي في الهواء النردين في آن واحد ، ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي مجموع رقمي الوجهين .

أعط قانون المتغير العشوائي .

تمرين 6

لدينا صندوقان A و B . الصندوق A يحتوي : 4 كرات حمراء ، 3 كرات بيضاء ، كرتان خضراوان .

الصندوق B يحتوي : كرتين حمراوين ، 4 كرات بيضاء .

نسحب 3 كرات بالكيفية الآتية : كرتان في آن واحد من الصندوق A وكرة واحدة من الصندوق B . 1- أحسب احتمال الحوادث الآتية :

الحادثة E : الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء .

الحادثة F : من بين الكرات الثلاث المسحوبة توجد كرتان خضراوان

2- نفرض أن بعد عملية السحب حصلنا على ثلاث كرات من بينها كرتان حمراوان ، مااحتمال كي تكون واحدة منهما من الصندوق B ؟

3- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات الخضراء المسحوبة من الصندوق A . حدد قانون المتغير X .

تمرين 7

قسم يحتوي 12 تلميذا و8 تلميذات . نريد تكوين أفواج عمل حيث كل فوج يحتوي على 5 أعضاء . 1- أحسب احتمال الحوادث الآتية :

الحادثة A : تلميذتان حنان وزينب من هذا القسم متخاصمتان لاتريدان أن تكونا معا في نفس الفوج .

الحادثة B : 3 صديقات يرغبن أن يكن معا في نفس الفوج .

الحادثة C : التلميذ أحمد موجود في الفوج .

الحادثة D : الفوج يحتوي على تلميذتين على الأكثر .

2 – نفرض أننا حصلنا على فوج فيه 3 ذكور ، ما احتمال كي يكون التلميذ أحمد موجود في الفوج .

تمرين 8

الجدول الآتي يعطي توزيع تلاميذ ثانوية أبو بكر الصديق .

الشعبة	علوم تجريبية	رياضيات	تقني رياضي
النسبة المئوية لعدد التلاميذ	50%	35%	15%
النسبة المئوية في النظام الداخلي	40%	60%	20%

نختار بطريقة عشوائية تلميذا .

1- ما احتمال أن يكون هذا التلميذ في النظام الداخلي ؟

2- إذا اخترنا بطريقة عشوائية تلميذا ووجدناه أنه في النظام الداخلي ما احتمال أن يكون من شعبة الرياضيات ؟

3- كون شجرة الاحتمالات المناسبة لهذه الوضعية وتحقق من إجابة السوال 1.

تمرين 9

D و E حادثتان حيث :

$$p(D)=\frac{2}{3}\ ,\ p(E)=\frac{1}{2}\ ,\ p(E\cap D)=\frac{1}{4}\ .$$

1- احسب :

$$p(E\cup D)\ ,\ p_D(E)\ ,\ p_E(D)\ ,\ p(\overline{E}\cap\overline{D})\ .$$

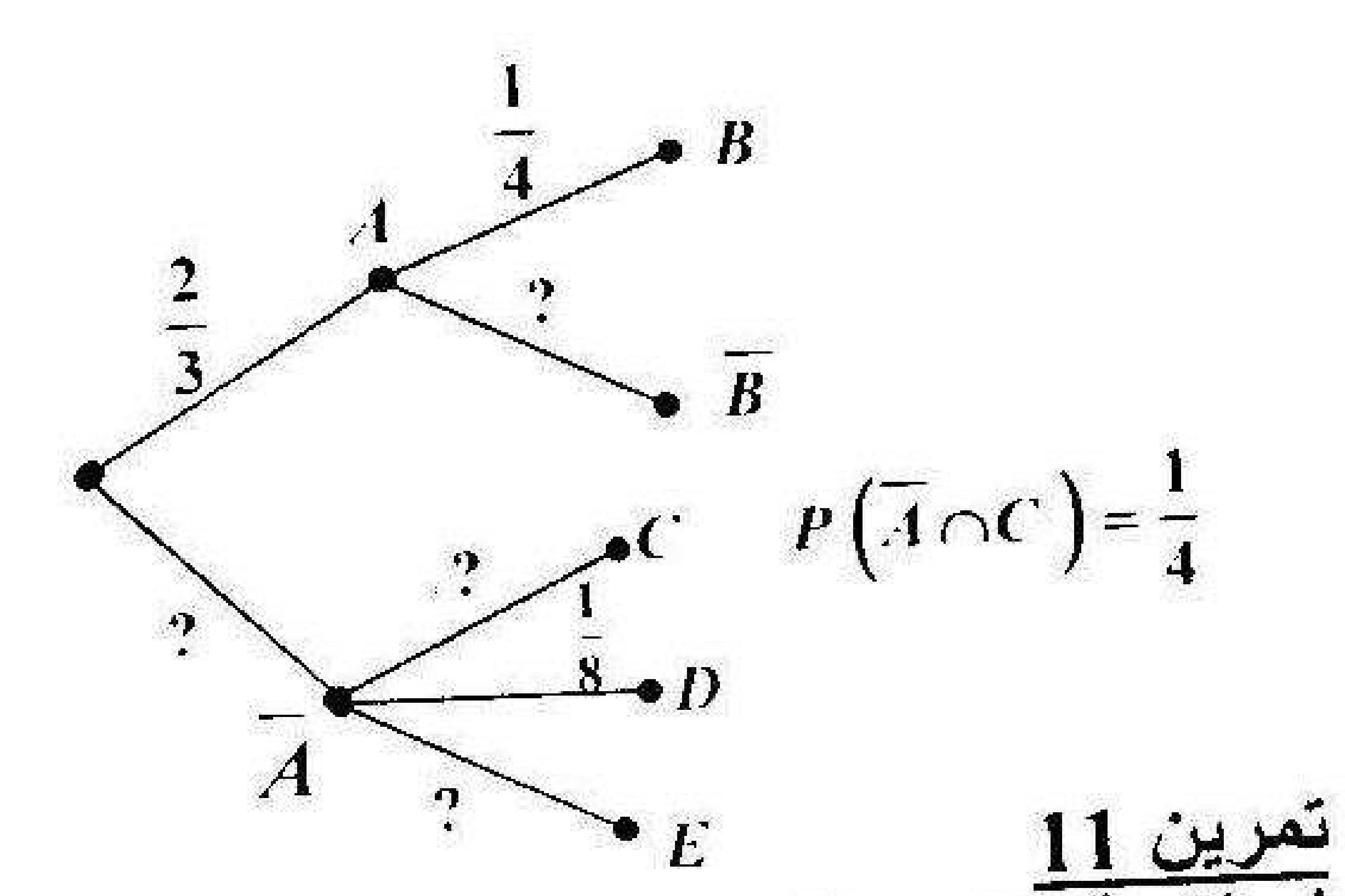
2- هل الحادثتان E و D مستقلتان ؟ .

تمرين 10

1- أكمل شجرة الاحتمالات الآتية : (أنظر إلى الصفحة الموالية) .

2- احسب :

$$p(A\cap B),\ p_{\overline{B}}(A)\ ,\ p(\overline{A}\cup C)\ ,\ p(\overline{A}\cap D)\ ,\ p(A\cup B)$$



تمرين 11

في ثانوية ما نجح 60% من التلاميذ في امتحان الرياضيات ، 70% من التلاميذ في امتحان الفيزياء ، 40% في امتحان الرياضيات والفيزياء . نختار عشوائيا تلميذا ونفرض أن جميع الاختيارات متساوية الاحتمال . احسب احتمال كل من الحوادث الآتية :

الحادثة A : التلميذ المختار ناجح في الرياضيات أو في الفيزياء

الحادثةB : التلميذ المختار ناجح في الفيزياء وغير ناجح في الرياضيات . الحادثةC : التلميذ المختار غير ناجح في الرياضيات وغير ناجح في الفيزياء .

تمرين 12

I. يتكون قسم من 18 ذكرا و12 إناثا (يوجد في هذا القسم التلميذ أحمد وأخته زينب) . نريد اختيارا عشوائيا 3 تلاميذ من هذا القسم لتكوين لجنة تمثل القسم . 1- ما هو عدد اللجان التي يمكن تكوينها ؟

2- احسب احتمال الحوادث الآتية :

أ- الحادثة A : الحصول على لجنة مختلطة .

ب- الحادثة B : الحصول على لجنة تظم على الأقل تلميذة

ج- الحادثة C : الحصول على لجنة لا تحتوي على أحمد وأخته معا .

3- نفرض أننا حصلنا على لجنة مختلطة فما هو الاحتمال كي تكون التلميذة زينب في اللجنة ؟

II. بعد الإطلاع على ملفات التلاميذ تبين أن 30% من الذكور و 50% من الإناث يسكنون الريف . نختار عشوائيا تلميذا من هذا القسم ونعتبر الحوادث الآتية :

G : "التلميذ من الذكور" . F : "التلميذ من الإناث"

D : "التلميذ يسكن في الريف" . $\overline{D}$: "التلميذ لا يسكن في الريف"

أ- احسب الاحتمالات الآتية :

$$p(G)\ ,\ p(G\cap D)\ ,\ p(F\cap D)\ ,\ p(D)$$

ب- نفرض أن التلميذ المختار هو ذكر، ما احتمال أنه يسكن الريف ؟

ج- ما احتمال أن يكون التلميذ المختار ذكرا علما أنه يسكن الريف ؟

د- ما احتمال أن يكون التلميذ المختار ذكرا ويسكن الريف ؟

تمرين 13

I. صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء مرقمة 1، 1 ، 2 و5 كرات حمراء مرقمة 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 . نسحب في آن واحد 3 كرات من الصندوق . 1- احسب احتمال الحوادث الآتية :

أ- الحادثة A : الكرات المسحوبة هي من نفس اللون .

ب- الحادثة B : الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم .

جـ - الحادثة C : الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم علما أنها من نفس اللون . 2- احسب $p_A(B)$

II. لدينا 3 صناديق u_1,u_2,u_3 . الصندوق u_1 يحتوي على كرة بيضاء و4 كرات حمراء . الصندوق u_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و3 كرات حمراء . الصندوق u_3 يحتوي على 3 كرات بيضاء وكرتين حمراوين . نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة ثم نسحب منه عشوائيا كرة واحدة .

1- احسب احتمال الحادثة E : اختيار صندوق يحتوي على أكثر من كرتين حمراوين . 2- احسب احتمال الحادثة F : سحب كرة بيضاء .

3- احسب احتمال سحب كرة بيضاء علما أنها مسحوبة من صندوق يحتوي على أكثر من كرتين حمراوين .

تمرين 14

I. يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء .
نسحب عشوائيا وعلى التوالي وبدون إعادة 5 كرات من الصندوق .
احسب احتمال الحصول على أول كرة بيضاء في السحب الثالث .

II. نعتبر الصندوق في وضعيته الأولى وفي هذه المرة نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق وبدون إعادتهما إليه ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين أخريين .

1- احسب احتمال كل من الحادثتين التاليتين :
الحادثة E : الكرتان المسحوبتان في السحبة الأولى بيضاوين والكرتان المسحوبتان في السحبة الثانية حمراوين .
الحادثة F : يبقى في الصندوق بعد السحبة الثانية 3 كرات من نفس اللون . 2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء الباقية في الصندوق بعد السحبة الثانية .
أعط قانون المتغيرX واحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

تمرين 15

نعتبر اللعبة الآتية : نضع في كيس 10 قريصات مرقمة :
0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 واللاعب يسحب على التوالي 4 قريصات بدون إرجاع القريصة المسحوبة إلى الكيس .
ترتب القريصات المسحوبة حسب ترتيب سحبهما من اليسار إلى اليمين يحصل اللاعب على عدد محصور بين 123 و 9876 .

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- بين أن احتمال الحصول على عدد مكون من 4 أرقام هو 0,9 .

في كل مرة اللاعب قد يربح أو يخسر وذلك حسب الشروط الآتية للعبة
- إذا تحصل على عدد أكبر من 9000 فيربح 50 دينار .

- إذا تحصل على عدد محصور بين 5000 و 9000 فيربح 30 دينار .
- إ ذا تحصل على عدد مكون من 4 أرقام وأقل من 5000 فيخسر20
- إذا تحصل على عدد مكون من ثلاثة أرقام فيخسر 30 دينار .

3- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عدد المحصل عليه الربح أو (الخسارة) المناسبة. أ- ما هي القيم التي يأخذها المتغيرX
ب- أعط قانون احتمال X . جـ - احسب الأمل الرياضي

تمرين 16

لدينا نردان أوجههما مرقمة من 1 إلى 6 . نرمي هذين النردين معا .
نرمز بـ x و y إلى الرقمين التي تظهر على الوجهين العلويين .

1- احسب الاحتمال بأن يكون الجداء xy من مضعفات 5.

2- نرمي n مرة النردين معا . أ- احسب الاحتمال p_n للحصول على الأقل مرة واحدة الجداء xy من مضاعفات 5 .
ب- عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n من أجلها يكون $p_n \geq 0,99$.

تمرين 17

في ثانوية 55% من التلاميذ هم من الإناث . في نفس الثانوية 22% من الإناث و 18% من الذكور يدرسون اللغة الألمانية .

1- نختار بطريقة عشوائية تلميذا من هذه الثانوية .
أ- علما أن التلميذ المختار هو ذكر، احسب الاحتمال كي يكون هذا التلميذ يدرس الألمانية .
ب- احسب الاحتمال كي يكون التلميذ المختار يدرس الألمانية ويكون ذكرا . جـ - بين أن احتمال التلميذ المختار يدرس الألمانية هو 0,202 .

2- في هذه المرة نختار عشوائيا 5 تلاميذ من الثانوية .
أ- احسب الاحتمال كي لا أحد من 5 التلاميذ المختارين يدرس الألمانية.
ب- احسب الاحتمال كي الخمسة التلاميذ المختارين يدرسون الألمانية .
جـ - ما احتمال كي يكون 3 تلاميذ فقط من الخمسة المختارين يدرسون الألمانية .

تمرين18

في سنة 2000 ظهر مرض خطير ومجهول في بلد إفريقي .

نقدر أن 7% من سكان هذا البلد أصيبوا بهذا الداء . بعد سلسلة من البحوث الطبية توصل الأطباء إلى وضع تحليل طبي(Test) يشخص هذا المرض . إذا كان التحليل الطبي إيجابي فالشخص مريض وإذا كان سلبي فالشخص ليس مريض . وثبت أنه : - إذا كان الشخص مريضا فإن التحليل الطبي إيجابي في 87% من الحالات . - إذا كان الشخص ليس مريضا فإن التحليل الطبي سلبي في 98% من الحالات .

نرمز بـ F للحادثة : " الشخص مريض " و بـ T للحادثة : " التحليل الطبي للشخص إيجابي " .

1- احسب احتمال الحوادث الآتية :

أ- F و T ، ب- $\overline{F}$ و $\overline{T}$ ، جـ- F و $\overline{T}$

2- استنتج احتمال الحادثة T .

3- احسب الاحتمال كي شخص له تحليل طبي سلبي يكون مريض

تمرين 19

ورشة فيها آلتان M_1 و M_2 تصنع نفس القطع .

بعض القطع المصنوعة توجد فيها نقائص وتعتبر غير صالحة .

احتمال الحصول على قطعة صالحة هو 0,9 بالنسبة للآلة M_1 و 0,95 بالنسبة للآلة M_2 . الآلة M_1 أنتجت $\frac{2}{3}$ من الإنتاج الكلي والآلة M_2 أنتجت $\frac{1}{3}$ المتبقي . 1 – نختار بطريقة عشوائية قطعة مصنوعة ونقبل أن الاختيارات متساوية الاحتمال .

أ- احسب احتمال الحادثتين الآتيتين :

الحادثة A : القطعة أنتجت من طرف الآلة M_1 .

الحادثة B : القطعة أنتجت من طرف الآلة M_2 .

نعتبر الحادثة S : " القطعة المصنوعة صالحة " .

احسب $p_{M_1}(S)$ و $p_{M_2}(S)$ ثم استنتج أن : $p(S)=\frac{11}{12}$.

2- نأخذ عينة تحتوي 7 قطع مصنوعة من طرف الورشة ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد القطع الصالحة في العينة ونقبل أن X يتبع قانون الثنائي .

أ- احسب الاحتمال بأن لا توجد أية قطعة غير صالحة في هذه العينة .

ب- احسب الاحتمال كي يوجد في هذه العينة 6 قطع صالحة بالضبط

ج- استنتج احتمال وجود على الأقل قطعتين غير صالحتين "في العينة

تمرين 20

I. يحتوي صندوق على 10 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس :

4 كرات بيضاء مرقمة 1 ، 1 ، 1 ، 2 وثلاثة كرات زرقاء مرقمة 1 ، 1 ، 2 وثلاثة كرات حمراء مرقمة 2، 2 ، 1 .

نسحب في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

1- نعتبر الحادثتين التاليتين : الحادثة A : سحب كرة من كل لون والحادثة B : الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم .

أ- احسب الاحتمالات الآتية :

$$p(A)\ ,\ p(B)\ ,\ p(A\cap B)\ ,\ p_A(B)$$

ب- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ .

جـ - احسب احتمال الحادثةC : من بين الكرات المسحوبة توجد كرتان زرقاوان علما أن الحادثة B محققة .

II. نقوم بتجربة أخرى حيث نسحب 3 سحابات متتالية لـ 3 كرات في آن واحد من الصندوق (كل سحبة تحتوي على3 كرات) ، الكرات المسحوبة لا تعاد إلى الصندوق . نعتبر الحادثة T_i : نحصل

على ثلاثي الألوان في السحبة i حيث $i \in \{1;2;3\}$.

1- احسب $p(T_1)$ ثم $p(T_2)$ علما أن $p(T_1)$ محققة .

استنتج $p(T_1 \cap T_2)$. 2- احسب $p(T_1 \cap T_2 \cap T_3)$

تمرين 21

I. يحتوي كيس u_1 على ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين .

نسحب عشوائيا وعلى التوالي كرتين من الكيس وبإرجاع الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي .

1- احسب احتمال الحصول على :

أ- كرتين حمراوين . ب- كرتين مختلفتين في اللون .

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط بكل سحبة كرتين (حسب الطريقة السابقة) بعدد الكرات السوداء . أعط قانون المتغير X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

3- نعيد التجربة الأولى (سحب كرتين على التوالي وبإرجاع) 5 مرات متتالية . ما احتمال الحصول على كرتين حمراوين 3 مرات .

II. نعتبر كيس ثاني u_2 يحتوي كرتين حمراوين وكرتين سوداوين .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق u_1 وكرة من الصندوق u_2 . 1- ماحتمال سحب 3 كرات من نفس اللون .

2- اخترنا بطريقة عشوائية أحد الكيسين وسحبنا منه كرة واحدة .

أ- ماحتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء .

ب- نفرض أن الكرة المسحوبة بيضاء ما احتمال أن تكون هذه الكرة مسحوبة من الكيس u_1

تمرين 22

نرد أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 . نرمي هذا النرد 4 مرات متتالية ونسجل في كل رمية الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي للنرد .

نفرض أن جميع الأوجه لها نفس الاحتمال في الظهور وأن الرميات الأربعة مستقلة . 1- ماحتمال ظهور الرقم 4 ثلاث مرات ؟

2- ماحتمال ظهور الرقم 4 على الأقل مرة واحدة ؟

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد مرات ظهور الرقم 4 في الأربع رميات المتتالية . 1- عين مجموعة الإمكانيات Ω

2- عين قانون احتمال المتغيرX .

3- احسب الأمل الرياضي $E(X)$ و التباين $V(X)$.

تمرين 23

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و x كرة سوداء $(x \geq 2)$.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق .

ليكنX المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة

1- عرف قانون احتمال المتغيرX . 2- احسب $E(X)$.

3- احسب x حتى يكون : $P(x=0) = p(X=2)$.

4- نفرض أن في ما يأتي $x = 3$.

نقوم بخمسة سحبات متتالية لكرتين في آن واحد وبالإرجاع (تعاد الكرتان إلى الصندوق بعد كل سحبة) .

احسب احتمال سحب مرة واحدة كرتين بيضاوين .

تمرين 24

I. صندوق u_1 يحتوي 4 كرات مرقمة 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق نسجل رقمها ثم نعيدها إلى الصندوق نكرر هذه التجربة 5 مرات متتالية ونعتبر المتغير العشوائيY الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1 في الخمس سحابات

1- عرف قانون احتمال Y محدد وسيطاه
2- احسب احتمال كل من الحادثتين :
الحادثة A : الحصول على 4 كرات تحمل الرقم 1 .
الحادثة B : الحصول على 4 كرات على الأكثر تحمل الرقم 1 .

II. نعتبر صندوق ثاني u_2 الذي يحتوي 5 كرات : ثلاثة تحمل الرقم 2 واثنان تحمل الرقم 3 . نقوم بالتجربة التالية : نسحب كرة من u_1 وكرة من u_2 ، وليكن a الرقم المسجل على الكرة المسحوبة من u_1 وليكن b الرقم المسجل على الكرة المسحوبة من u_2 . نعتبر المتغير العشوائيX الذي يرفق بكل ثنائية $(a;b)$ المجموع $(a+b)$.

1- عين قانون احتمال المتغيرX . 2- احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ والانحراف المعياري للمتغيرX .

تمرين 25

1- نرمي 5 قطع نقدية في آن واحد . احسب احتمال الحصول على 3 مرات "وجه" و مرتين " ظهر" .
2- متغير عشوائيX يتبع قانون الثنائي .
إذا كان $E(X)=12$ و $V(X)=2,4$. عين n و p .
3- نرمي في آن واحد n نرد متشابه .
أ) احسب احتمال الحصول على مرة واحدة الرقم 6 .
ب) احسب احتمال الحصول على مرتين على الأقل على الرقم 6

تمرين 26

ملامس آلة كاتبة مكونة من 6 حروف متحركة و20 حرفا ساكنا .
شخص يضرب بطريقة عشوائية 6 حروف . مااحتمال الحصول على :
أ- 6 حروف متحركة . ب- 6 حروف ساكنة .
جـ - 3 حروف متحركة و3 حروف ساكنة .

تمرين 27

الجدول الآتي يعطي التوزيع للأهم الزمر الدموية لولاية ما من الوطن .

	O	A	B	AB
Rhésus+	37%	38,1%	6,2%	2,8%
Rhésus-	7%	7,2%	1,2%	0,5%

1- ما احتمال أن يكون شخص له دم من (Rhésus-) .
2- اخترنا بطريقة عشوائية 10 متبرعين بالدم . نعتبر المتغير العشوائيX الذي يساوي عدد المتبرعين الذين زمرتهم A .
احسب $p(X=4)$.
3- من أجل إجراء عملية جراحية احتاجت مصلحة جمع الدم للمستشفى على الأقل ثلاث أشخاص ذوي الزمرة O^+
تطوع لهذا العمل الإنساني 10 متبرعين وهم يجهلون زمرتهم الدموية احسب الاحتمال كي يكون من بين المتطوعين على الأقل ثلاث متبرعين زمرتهم O^+ لازمين لهذه العملية الجراحية .

تمرين 28

شخص له 10 مفاتيح غير قابلة للتمييز منها واحد فقط صالح لفتح باب منزله . في يوم ما ، أراد هذا الشخص فتح باب بيته فبدأ بتجربة المفاتيح حيث يعيد في كل مرة المفتاح الذي جربه إلى صرة المفاتيح قبل التجربة الموالية .
1- احسب الاحتمال كي الشخص يفتح الباب في التجربة الرابعة فقط .
2- في هذه المرة استعمل طريقة أخرى وهي تتمثل في تجريب المفتاح ثم وضعه في جانب آخر (لا يعيد المفتاح إلى صرة المفاتيح) وإكمال التجربة بالمفاتيح المتبقية . نرمز بـ X للمتغير العشوائي الذي يساوي عدد التجارب اللازمة لفتح الباب . حدد قانون المتغيرX واحسب

الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$.

تمرين 29

يحتوي مخزن 3 أنواع من الآلات الكهرومنزلية :
M_1 , M_2 , M_3 وهي معبأة داخل علب من (الكارتون) .

نصف كمية المخزن هي من النوع M_1 و $\frac{1}{8}$ كمية المخزن هي من النوع M_2 وباقي كمية المخزن $\left(\frac{3}{8}\right)$ هي من النوع M_3 .

إذا علمنا أن في المخزن الآلات التي لونها أحمر تمثل : 13% من النوع M_1 و 5% من النوع M_2 و 10% من النوع M_3 .

نختار بطريقة عشوائية آلة كهرومنزلية .

1- احسب الاحتمال بأن تكون هذه الآلة من النوع M_3 .

2- مااحتمال أن تكون هذه الآلة حمراء علما أنها من النوع M_2 .

3- مااحتمال أن تكون هذه آلة ليست حمراء ؟

4- بعد الإطلاع على الآلة وجدنا أن لونها أحمر ، مااحتمال أن تكون من النوع M_1 ؟

تمرين 30

هدف مكون من منطقتين 1 و 2 كما يظهر في الشكل المقابل .

1

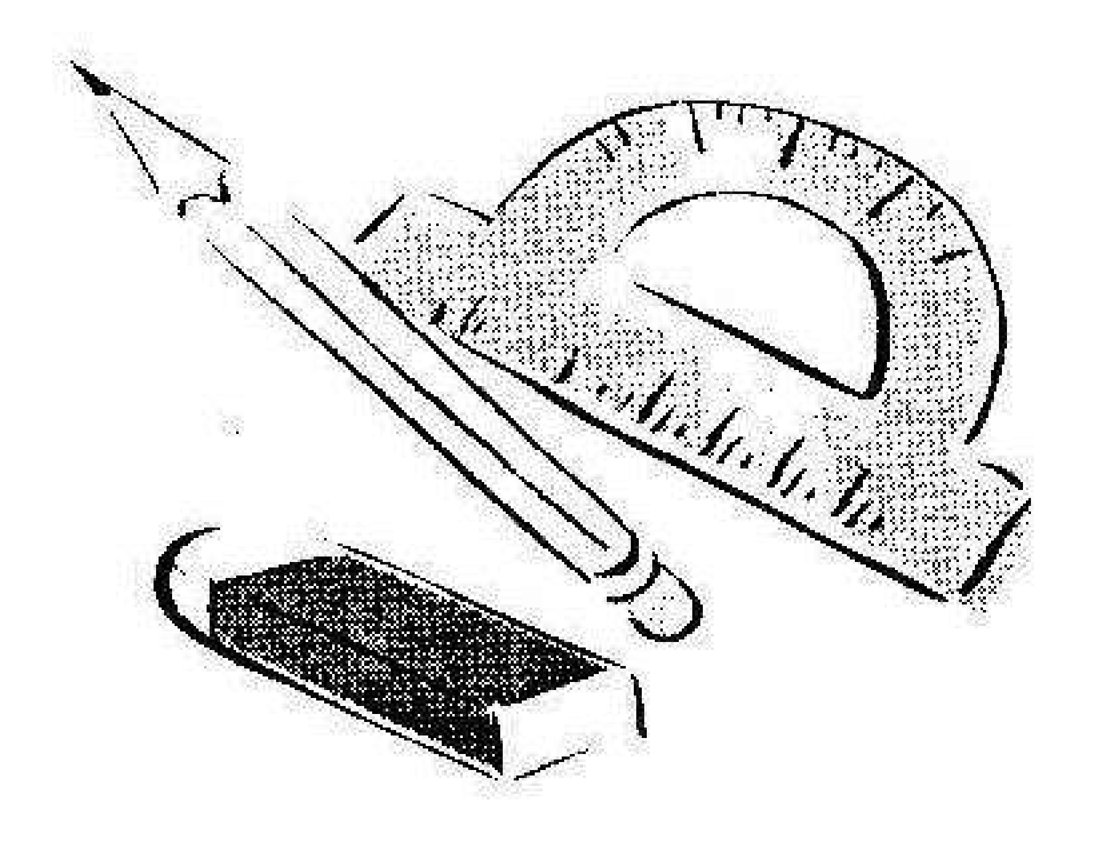
2

أطلق رام رميتين مستقلتين نحو هذا الهدف .

إذا علمت أن احتمال إصابة هذا الرامي المنطقة 2 هو $\frac{1}{6}$ ويسجل نقطتين واحتمال إصابة المنطقة 1 هو $\frac{1}{3}$ ويسجل نقطة واحدة .

1) احسب الاحتمال بأن لا يصيب الرامي الهدف .

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي مجموع النقاط المحصل عليها الرامي . عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي وانحرافه المعياري .



حلـــول الـــتماريـــن

حل التمريـن 1

أ- عدد نتائج السباق هو عدد ترتيبات لـ 3 عناصر مختارة من بين 12 عنصرا أي: (نتيجة) $A_{12}^3 = 1320$.

من بين هذه النتائج توجد نتيجة وحيدة (ترتيبة وحيدة لثلاثة عناصر) تطابق ترتيبة نتيجة السباق ويكون الاحتمال المطلوب هو : $\frac{1}{1320}$.

ب) إذا كان (a,b,c) هي نتيجة السباق ، فيكون الترتيب المخالف لهذه النتيجة هو :

$$(b,a,c)\,,(a,c,b)\,,(c,a,b)\,,(b,c,a)\,,(a,b,c)$$

وهي تمثل 5 نتائج ويكون الاحتمال المطلوب هو : $\frac{5}{1320}$.

حل التمريـن 2

1) عدد الحالات الممكنة هو عدد التوفيقات لـ 3 عناصر مختارة من بين 100 أي : $C_{100}^3 = 161700$.

احتمال الحادثة A: $p(A)=\frac{C_{85}^3}{C_{100}^3}=\frac{98770}{161700}=\frac{1411}{2310}$

احتمال الحادثة B : $p(B)=\frac{C_{15}^3}{C_{100}^3}=\frac{455}{161700}=\frac{13}{4620}$

احتمال الحادثة C : $p(C)=\frac{C_3^2\times C_{85}^1}{C_{100}^3}=\frac{255}{161700}=\frac{17}{10780}$

2) من صيغة السؤال يتضح أن الاحتمال المطلوب هو الاحتمال الشرطي : احتمال الحادثة C علما أن الحادثة B محققة أي $p_B(C)$

ونعلم أن : $p_B(C)=\frac{p(C\cap B)}{p(B)}$. الحادثة $(C\cap B)$ تمثل ربح 3 جوائز منها جائزتان كبريان ومنه :

$$p(C\cap B)=\frac{C_3^2\times C_{12}^1}{C_{100}^3}=\frac{36}{161700}=\frac{3}{13475} .$$

إذن : $p_B(C)=\frac{3}{13475}\div\frac{13}{4620}=\frac{396}{5005}$

3- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 1 ، 2 ، 3 .

$$p(X=1)=\frac{C_3^1\times C_{97}^2}{C_{100}^3}=\frac{13968}{161700}=\frac{3492}{40425}$$

$$p(X=2)=\frac{C_3^2\times C_{97}^1}{C_{100}^3}=\frac{291}{161700}=\frac{97}{53900}$$

$$p(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{100}^3}=\frac{1}{161700}$$

حل التمريـن 3

1- بما أن x,y,z متناسبة مع 2 ، 3 ، 5 على الترتيب فإن :

$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$ ونعلم $x+y+z=1$ (مجموع كل الاحتمالات هو1)

ومنه : $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{2+3+5}=\frac{1}{10}$

$$x=\frac{1}{5} \quad , \quad y=\frac{3}{10} \quad , \quad z=\frac{1}{2}$$

2- بما أن نتيجة الرمية الأولى لا تؤثر على نتيجة الرمية الثانية ، فالحادثتان مستقلتان ومنه احتمال الحصول على الثنائية $(a;b)$ هو $p(a)\times p(b)$.

$$p(1;1)=p(1)\times p(1)=\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$p(2;1)=p(1;2)=p(1)\times p(2)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{50} \ ,$$

$$p(3;1)=p(1;3)=p(1)\times p(3)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

$$p(2;2)=p(2)\times p(2)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$$

$$p(2;3)=p(3;2)=p(2)\times p(3)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{20}$$

$$p(3;3)=p(3)\times p(3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

3- $(a+b)$ من مضاعفات 3 يعني :

$(a;b)\in\{(1;2),(2;1),(3;3)\}$ ومنه :

$$p(X=1)=2\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{37}{100}$$

$a+b=4$ يعني $(a;b)\in\{(1;3),(3;1),(2;2)\}$ ومنه :

$$p(X=2)=2\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{29}{100}$$

$a-b=0$ يعني $(a;b)\in\{(1;1),(2;2),(3;3)\}$ ومنه :

$$p(X=3)=\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{19}{50}$$

حل التمرين 4

احتمال نجاح صالح هو $\frac{1}{3}$ ويكون احتمال عدم نجاحه هو :

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ (عدم نجاح صالح يمثل الحادثة العكسية لنجاحه) .

احتمال عدم نجاح أحمد هو : $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. بما أن نتيجة نجاح أحمد لا تؤثر على نجاح صالح فالحادثتان مستقلتان .

أ- احتمال نجاح الاثنين في البكالوريا هو : $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

ب- احتمال نجاح واحد منهم على الأقل هو :

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{6}$$

حل التمرين 5

1- نعلم أن $p_1+p_2+p_3=1$ (مجموع كل الاحتمالات). وبما أن p_1 , p_2 , p_3 هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$ فإن :

$p_1+p_2+p_3=3p_2=1$ ومنه $p_2=\frac{1}{3}$ و منه

$$p_1=p_2-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12} \quad \text{و} \quad p_3=p_2+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

2- لدينا 3 وجوه تحمل الرقم 1 و 3 وجوه تحمل الرقم 2 ومنه :

$$p'_1=p'_2=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \ .$$

3- القيم التي يأخذها المتغير العشوائيX هي : 2 ، 3 ، 4 ، 5 .
بما أن نتيجة النرد A لا تؤثر على نتيجة النرد B فالحادثتان هما مستقلتان ومنه :

$$p(X=2)=p_1\times p'_1=\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24} \quad (A(1),B(1))$$

$$p(X=3)=p'_1\times p_2+p_1\times p'_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{24}$$

$$(A(1);B(2)) \ ,(A(2);B(1))$$

$$p(X=4)=p_2\times p'_2+p_3\times p'_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{24}$$

$$(A(2);B(2)) \ ,(A(3);B(1))$$

$$P(X=5)=p_3\times p'_2=\frac{7}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{24} \quad (A(3);B(2))$$

حل التمرين 6

1- عدد الطرق لسحب 3 كرات بالكيفية المذكورة هو :
$C_9^2\times C_6^1=216$. الحادثة E محققة لما نسحب كرتين بيضاوين من الصندوق A وكرة بيضاء من الصندوقB ومنه :

$p(E)=\frac{C_3^2\times C_4^1}{216}=\frac{1}{18}$. الحادثة F محققة لما نسحب كرتين خضراوين من A وكرة منB ومنه : $p(F)=\frac{C_2^2\times C_6^1}{216}=\frac{1}{36}$

2) لتكن الحادثة G : سحب 3 كرات من بينها كرتان حمراوان ، وتكون الحادثة G محققة لما نسحب كرتين حمراوين من A وكرة ليست حمراء منB أو سحب كرة حمراء من A وسحب كرة حمراء أخرى منB ومنه :

$$p(G)=\frac{C_4^2\times C_4^1+C_4^1\times C_5^1\times C_2^1}{216}=\frac{8}{27}$$

لتكن الحادثة H : من بين الكرات الثلاثة المسحوبة توجد كرة حمراء مسحوبة من الصندوق B . الاحتمال المطلوب هو الاحتمال الشرطي : احتمال الحادثة H علما أن الحادثة G محققة أي $p_G(H)$ ومنه :

$p_G(H)=\frac{p(G\cap H)}{p(G)}$. الحادثة $G\cap H$ تمثل سحب 3 كرات من بينها كرتان حمراوان إحداهما مسحوبة من الصندوق B ومنه

$$p(G\cap H)=\frac{(C_4^1\times C_5^1)\times C_2^1}{216}=\frac{5}{27}$$ ومنه :

$$p_G(H)=\frac{5}{27}\div\frac{8}{27}=\frac{5}{8} \ .$$

3- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2

$$p(X=0)=\frac{C_7^2\times C_6^1}{216}=\frac{7}{12} \ ,p(X=2)=\frac{C_2^2\times C_6^1}{216}=\frac{1}{36}$$

$$p(X=1)=\frac{C_2^1\times C_7^1\times C_6^1}{216}=\frac{7}{18}$$

حل التمرين 7

1) عدد الأفواج التي تحتوي حنان وزينب معا هو $C_{18}^3=816$ ويكون عدد الأفواج التي لا تحتوي حنان وزينب معا هو:

$C_{20}^5-816=15504-816=14688$ ومنه

$$p(A)=\frac{14688}{C_{20}^5}=\frac{14688}{15504}=\frac{306}{323}.$$

لتحقيق الحادثة B يجب اختيار تلميذين فقط من بين 17 تلميذ لإتمام الفوج ومنه : $p(B)=\frac{C_{17}^2}{C_{20}^5}=\frac{1}{114}$.

لتحقيق الحادثة C يجب اختيار 4 تلاميذ من 19 مع أحمد لإتمام الفوج ومنه : $p(C)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^5}=\frac{1}{4}$.

تلميذتين على الأكثر يعني الفوج يحتوي تلميذتين أو تلميذة او لا توجد فيه أية تلميذة ومنه :

$$p(C)=\frac{C_{12}^5+\left(C_8^1\times C_{12}^4\right)+\left(C_8^2\times C_{12}^3\right)}{C_{20}^5}=\frac{682}{969}$$

2- لتكن الحادثة H : الفوج يحتوي 3 ذكور ويكون الاحتمال المطلوب هو الاحتمال الشرطي : احتمال الحادثة C علما أن الحادثة H محققة

ومنه $p_H(C)=\frac{p(H\cap C)}{p(H)}$. الحادثة $H\cap C$ تمثل فوج يوجد فيه 3 ذكور من بينهم التلميذ أحمد ومنه :

$$p(H\cap C)=\frac{C_{11}^2\times C_8^2}{C_{20}^5}=\frac{1540}{15504}=\frac{385}{3876}$$

ولدينا $p(H)=\frac{C_{12}^3\times C_8^2}{C_{20}^5}=\frac{385}{969}$ ومنه

$$p_H(C)=\frac{385}{3876}\div\frac{385}{969}=\frac{969}{3876}=\frac{1}{4}$$

حل التمرين 8

1- لنرمز بـ : S ، M ، T للحوادث الآتية :

" S " التلميذ المختار هو من شعبة العلوم .

" M " التلميذ المختار هو من شعبة الرياضيات .

" T " التلميذ المختار هو من شعبة تقني رياضي .

نعتبر الحادثة A : التلميذ المختار في النظام الداخلي .

لدينا حسب المعطيات :

$$p(S)=0,5\ ,\ p(M)=0,35\ ,\ p(T)=0,15$$

$$p_S(A)=0,4\ ,\ p_M(A)=0,6\ ,\ p_T(A)=0,2$$

بما أن الحوادث S ، M ، T تشكل تجزئة لمجموعة تلاميذ القسم فإن حسب دستور الاحتمالات الكلية لدينا :

$$p(A)=p(S\cap A)+p(M\cap A)+p(T\cap A)=$$

$$=p(S)\cdot p_S(A)+p(M)\cdot p_M(A)+p(T)\cdot p_T(A)=$$

$$= 0,5\times 0,4 + 0,35\times 0,6 + 0,15\times 0,2 = 0,44$$

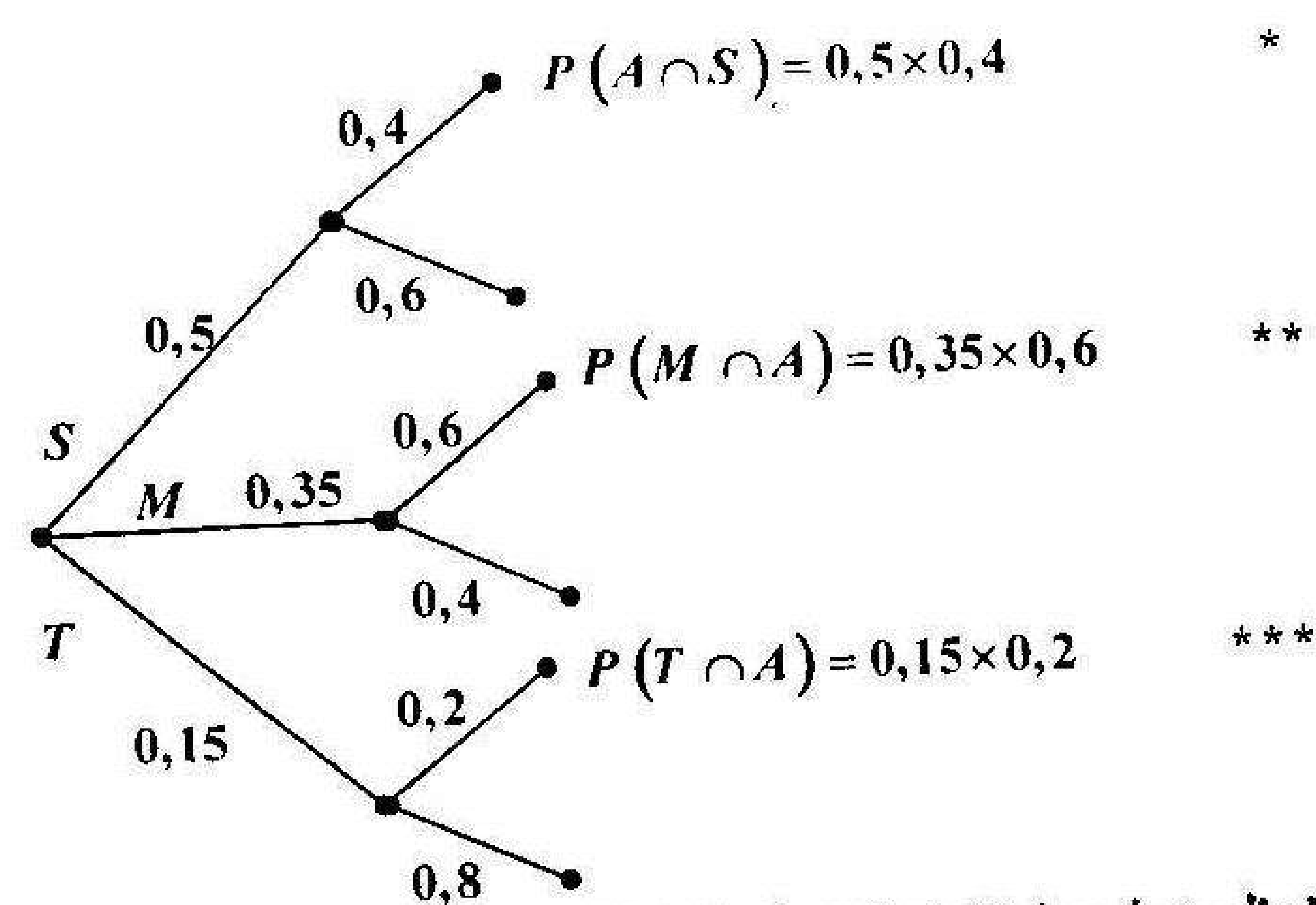
إذن احتمال أن التلميذ المختار يكون في النظام الداخلي هو 0,44

- احتمال أن يكون التلميذ المختار من شعبة الرياضيات علما أنه في النظام الداخلي هو الاحتمال الشرطي :

احتمال تحقق الحادثة M علما أن الحادثة A محققة أي $p_A(M)$.

$$p_A(M)=\frac{p(M\cap A)}{p(A)}=\frac{p(M)\cdot p_M(A)}{p(A)}=\frac{0,35\times 0,6}{0,44}$$

3- شجرة الاحتمالات المناسبة .



نلاحظ من شجرة الاحتمالات أن الحادثةA مكونة من ثلاث مسارات : ***, **, * إذن $p(A)$ هي مجموع احتمالات هذه المسارات أي : $0,5\times 0,4+0,35\times 0,6+0,15\times 0,2 = 0,44$ وهي النتيجة المحصل عليها في السؤال 1- .

حل التمرين 9

$$p(E\cup D)=p(E)+p(D)-p(E\cap D)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$$

$$p_D(E)=\frac{p(E\cap D)}{p(D)}=\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$$

نعلم أن الحادثة $(\overline{D}\cap\overline{E})$ تمثل الحادثة العكسية للحادثة $(D\cup E)$

ومنه $p(\overline{D}\cap\overline{E})=1-p(D\cup E)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$

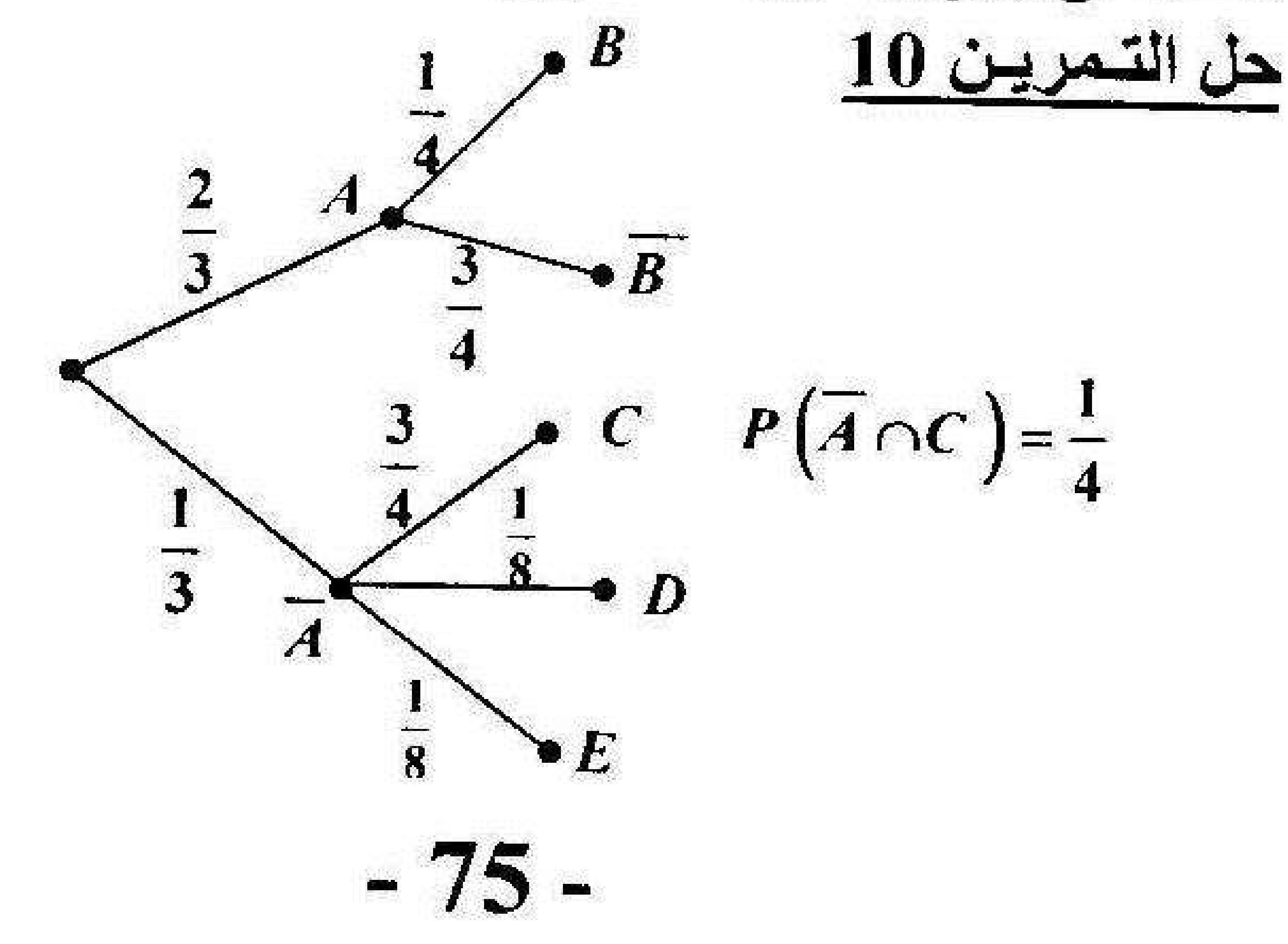
2- تكون الحادثتان E و D مستقلتان إذا تحقق ما يلي :

$p(E\cap D)=p(E)\times p(D)$. لدينا $p(E)\times p(D)=\frac{1}{3}$

و $p(E\cap D)=\frac{1}{4}$ وبما أن $p(E\cap D)\neq p(E)\times p(D)$

فالحادثتان D و E غير مستقلتان .

حل التمرين 10



$$p_{\overline{B}}(A)=\frac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})}=\frac{p(A)\cdot p_A(\overline{B})}{p(\overline{B})}=\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)\div\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$$

(2 $$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

$$p(\overline{A}\cup C)=p(\overline{A})+p(C)-p(\overline{A}\cap C)=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5}{6}$$

$$p(\overline{A}\cap D)=p(\overline{A})\times p_A(D)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$$

حل التمرين 11

نرمز بـ M للحادثة : التلميذ ناجح في الرياضيات ،
وبـ S للحادثة : التلميذ ناجح في الفيزياء .

لدينا : $p(M\cap S)=0,4$, $p(S)=0,7$, $p(M)=0,6$

$$P(A)=p(M\cup S)=p(M)+p(S)-p(M\cap S)=0,6+0,7-0,4=0,9$$

$$p(B)=p(S\cap\overline{M})=p(S)-p(S\cap M)=0,7-0,4=0,3$$

$$P(\overline{M}\cap\overline{S})=1-p(M\cup S)=1-p(A)=0,1$$

لأن الحادثة $(\overline{M}\cap\overline{S})$ هي الحادثة العكسية للحادثة $(M\cup S)$

حل التمرين 12

I. 1- عدد اللجان التي يمكن تكوينها يساوي عدد التوفيقات لـ 3 عناصر مختارة من بين 30 عنصرا أي: (لجنة) $C_{30}^3=4060$.

2 – أ) $p(A)=1-p(\overline{A})$ حيث $\overline{A}$ تمثل الحادثة العكسية لـ A .

$\overline{A}$ تمثل لجنة تظم ثلاثة تلاميذ من نفس الجنس ومنه :

ومنه : $p(\overline{A})=\frac{C_{18}^3+C_{12}^3}{4060}=\frac{816+220}{4060}=\frac{37}{145}$

. $p(A)=1-\frac{37}{145}=\frac{108}{145}$

ب- $p(B)=1-p(\overline{B})$

حيث $\overline{B}$ هي الحادثة العكسية لـ B وهي تمثل لجنة لا يوجد فيها أية تلميذة أي لجنة تظم 3 تلاميذ ذكور.

$p(\overline{B})=\frac{C_{18}^3}{4060}=\frac{204}{1015}$ ومنه $p(B)=1-\frac{204}{1015}=\frac{811}{1015}$

يمكن حساب $p(B)$ بطريقة أخرى وهي تتمثل في اختيار لجنة تظم تلميذة أو تلميذتين أو ثلاثة تلميذات .

ج- اللجنة التي تظم أحمد وأخته زينب يتم تشكيلها باختيار تلميذ واحد من بين 28 تلميذ (بدون أحمد وزينب) ويكون عندئذ عدد اللجان التي تظم الأخوين معا هو $C_{28}^1=28$ واحتمال الحصول على لجنة من هذا الشكل هو $\frac{28}{4060}=\frac{1}{145}$ ويكون احتمال الحصول على لجنة لا تظم احمد وزينب معا هو : $p(C)=1-\frac{1}{145}=\frac{144}{145}$

3- لنرمز بـ E للحادثة : التلميذة زينب موجودة في اللجنة .

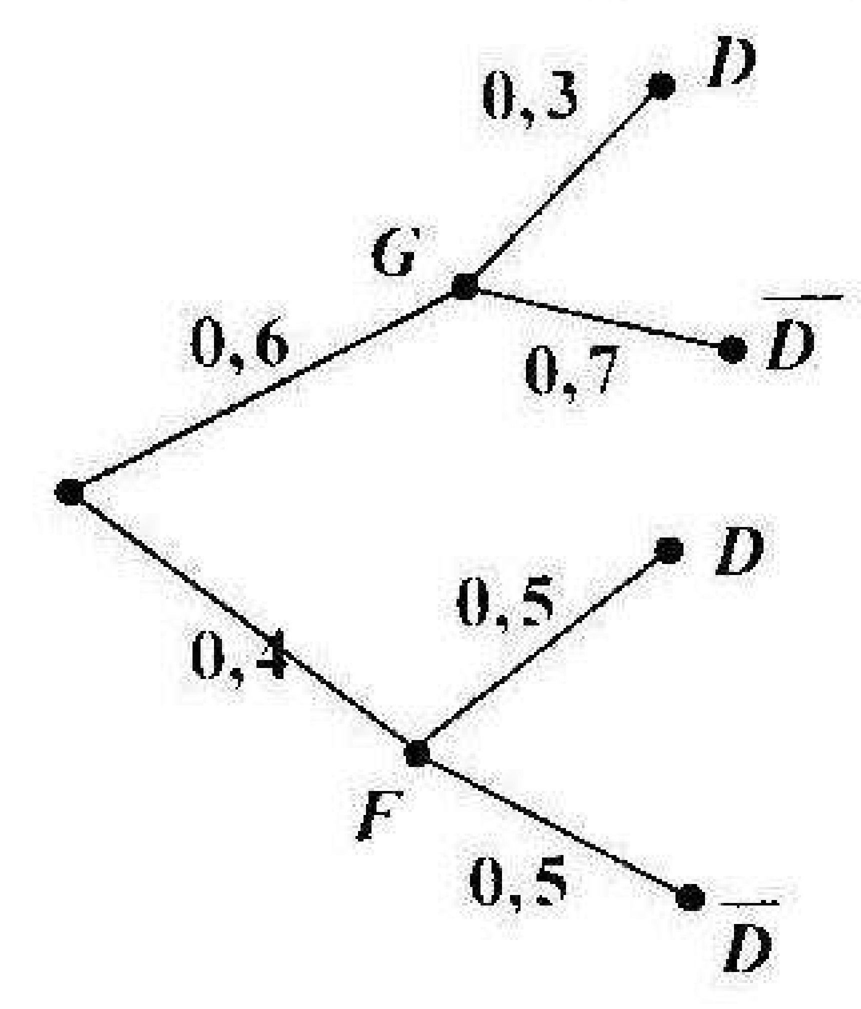
احتمال أن التلميذة زينب تكون في اللجنة علما أن هذه اللجنة مختلطة هو الاحتمال الشرطي $p_A(E)$ ومنه : $p_A(E)=\frac{p(A\cap E)}{p(A)}$

الحادثة $(A\cap E)$ تمثل لجنة مختلطة وفيها التلميذة زينب وهذه اللجنة يتم تشكيلها كما يلي : زينب وتلميذة وتلميذ أو زينب وتلميذين وعدد هذه اللجان هو : $(C_{11}^1\times C_{18}^1)+C_{18}^2=198+153=351$

ومنه $p(A\cap E)=\frac{351}{4060}$ و $p_A(E)=\frac{351}{4060}\div\frac{108}{145}=\frac{13}{112}$

II. $p(G)=\frac{18}{30}=0,6$ ، $p(F)=0,4$

$p(G\cap D)=0,6\times0,3=0,18$, $p(F\cap D)=0,4\times0,5=0,2$



لحساب $p(D)$ يمكن استعمل شجرة الاحتمالات أو استعمال دستور الاحتمالات الكلية لأن F و G تشكلان تجزئة لمجموعة تلاميذ القسم

$p(D)=p(G\cap D)+p(F\cap D)=0,18+0,2=0,38$

ب- احتمال أن التلميذ المختار يسكن الريف علما أنه ذكر هو الاحتمال الشرطي $p_G(D)$ ومنه :

$$p_G(D)=\frac{p(G\cap D)}{p(G)}=0,18\div0,6=0,3$$

ج- احتمال أن التلميذ المختار ذكرا علما أنه يسكن الريف هو الاحتمال الشرطي $p_D(G)$ ومنه :

$$p_D(G)=\frac{p(G\cap D)}{p(D)}=0,18\div0,38=0,473$$

د- احتمال أن يكون التلميذ المختار ذكرا ويسكن الريف هو:

$p(G\cap D)=0,18$.

حل التمرين 13

I. أ - الكرات الثلاثة المسحوبة هي من نفس اللون يعني تكون بيضاء أو حمراء .

$$p(A)=\frac{C_3^3}{C_8^3}+\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}+\frac{10}{56}=\frac{11}{56}$$

ب-الكرات الثلاثة تحمل نفس الرقم يعني تحمل الرقم 1 أو الرقم2 .

$$p(B)=\frac{C_3^3}{C_8^3}+\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}+\frac{10}{56}=\frac{11}{56}$$

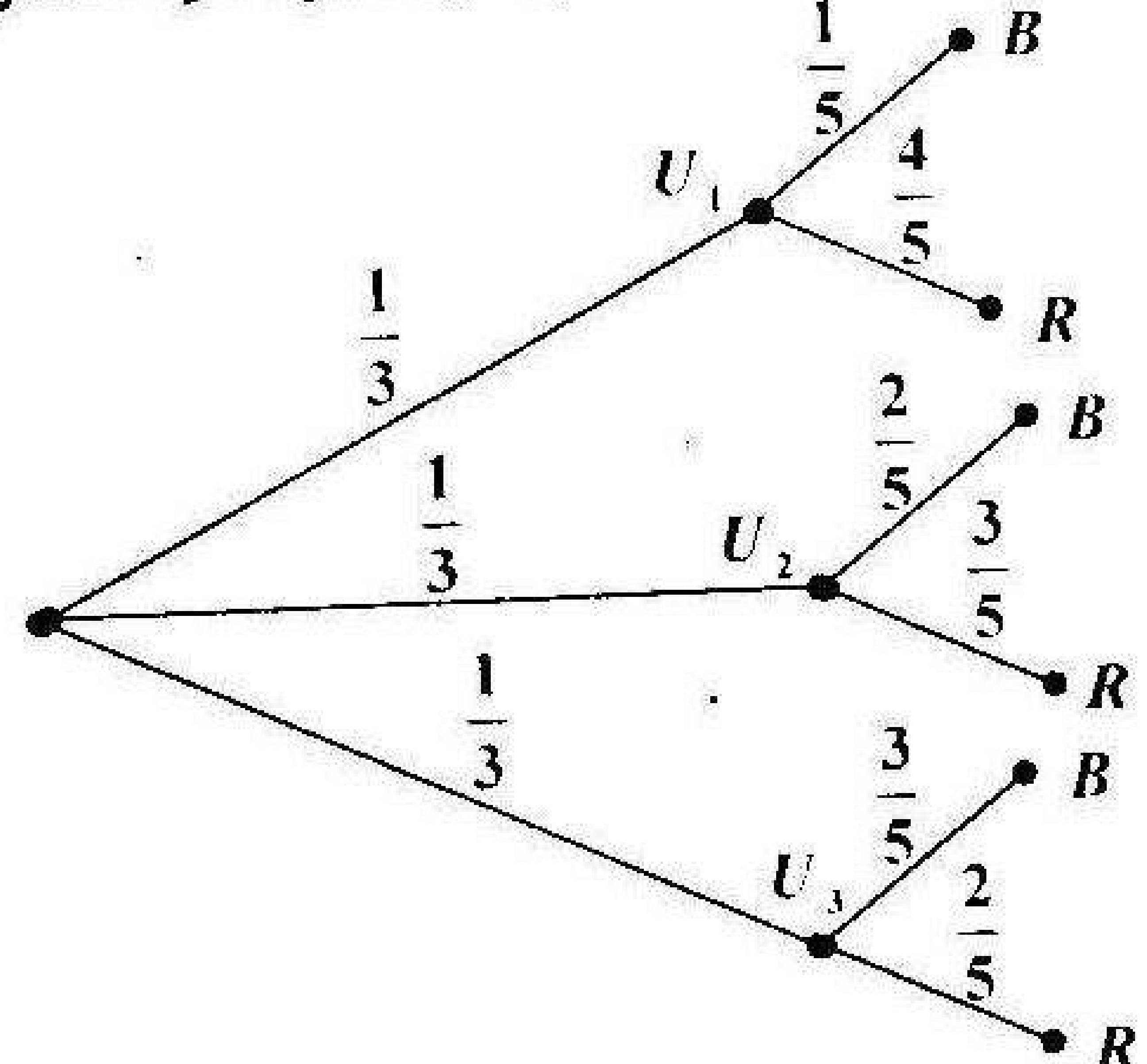
ج- احتمال سحب ثلاثة كرات تحمل نفس الرقم علما أنها من نفس اللون هو الاحتمال الشرطي $p_A(B)$. نعلم أن : $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

الحادثة $(A\cap B)$ هي سحب 3 كرات تحمل نفس الرقم ولها نفس اللون ويتحقق هذا لما نسحب 3كرات حمراء تحمل الرقم 1 .

ومنه $p(A\cap B)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$ إذن : $p_A(B)=\frac{1}{56}\div\frac{11}{56}=\frac{1}{11}$

-2 $$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{1}{56}\div\frac{11}{56}=\frac{1}{11}$$

II. 1) لدينا 3 صناديق واختيار عشوائيا واحد منهم هو $\frac{1}{3}$. بما أن لدينا صندوقين يحتويان على أكثر من كرتين حمراوين والاختيار يتم بطريقة عشوائية فإن : $p(E)=\frac{2}{3}$. لنرمز بـ B للكرة البيضاء وبـ R للكرة الحمراء . تكون شجرة الاحتمالات المناسبة لهذه الوضعية كالآتي :



2)- من شجرة الاحتمالات نستنتج حساب احتمال سحب كرة بيضاء .

$$p(F)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{5}$$

3- احتمال سحب كرة بيضاء علما أنها مسحوبة من صندوق يحتوي على أكثر من كرتين حمراوين هو الاحتمال الشرطي $p_E(F)$.

ونعلم أن : $p_E(F)=\frac{p(F\cap E)}{p(E)}$. الحادثة $(F\cap E)$ تمثل سحب كرة بيضاء ومن الصندوق الذي يحتوي على أكثر من كرتين حمراوين ويتحقق هذا لما نسحب كرة بيضاء من الصندوق u_1 أو u_2 .

ومنه : $p(F\cap E)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}$

ومنه : $p_E(F)=\frac{1}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{10}$

حل التمرين 14

I. الحصول على أول كرة بيضاء في السحبة الثالثة يعني الكرتان المسحوبتان الأولى والثانية هي حمراء . لنعتبر الحوادث الآتية :
الحادثة A : الكرة الأولى المسحوبة هي حمراء و الحادثة B : الكرة الثانية المسحوبة هي حمراء و الحادثة C : الكرة الثالثة المسحوبة هي بيضاء فتكون الحادثة $(A\cap B\cap C)$ هي الحادثة التي تمثل " الحصول على أول كرة بيضاء في السحبة الثالثة " .
بتطبيق مبدأ الاحتمالات المركبة فإن :
$p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p_A(B)\cdot p_{A\cap B}(C)$.

لدينا $p(A)=\frac{4}{7}$. بعد سحب الكرة الأولى حمراء (A محققة) يبقى

في الصندوق 6 كرات : 3 كرات حمراء و3 كرات بيضاء ومنه : $p_A(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. بعد السحبتين الأولى والثانية أي $(A\cap B)$ محققة يبقى في الصندوق 3 كرات بيضاء وكرتين حمراء ومنه : $p_{A\cap B}(C)=\frac{3}{5}$ إذن: $p(A\cap B\cap C)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$

II. 1- في السحبة الأولى سحبنا كرتين في آن واحد من الصندوق الذي يحتوي 7 كرات وتكون مجموعة الإمكانيات : $C_7^2=21$ وفي السحبة الثانية سحبنا كرتين من الكرات المتبقية في الصندوق وتكون مجموعة الإمكانيات $C_5^2=10$ إذن مجموعة الإمكانيات خلال السحبتين هو: $C_7^2\times C_5^2=21\times10=210$. ومنه احتمال الحادثة E هو : $p(E)=\frac{C_3^2\times C_4^2}{210}=\frac{18}{210}=\frac{3}{5}$. تتحقق الحادثة F لما نسحب في السحبة الأولى كرتين حمراوين وفي السحبة الثانية أيضا كرتين حمراوين ويبق في الصندوق 3 كرات بيضاء (نفس اللون) إذن : $p(F)=\frac{C_4^2\times C_2^2}{210}=\frac{1}{35}$.

2- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 .

■ $X=0$ لما نسحب في السحبة الأولى كرتين بيضاوين وفي السحبة الثانية كرة بيضاء وكرة حمراء أو في السحبة الأولى نسحب كرة بيضاء وكرة حمراء وفي السحبة الثانية كرتين بيضاوين ومنه :

$$p(X=0)=\frac{C_3^2\cdot C_1^1\cdot C_4^1+C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_2^2}{210}=\frac{12+12}{210}=\frac{4}{35}$$

■ $X=1$ لما نسحب في السحبة الأولى كرتين بيضاوين وفي السحبة الثانية كرتين حمراوين أو نسحب في السحبة الأولى كرتين حمراوين وفي السحبة الثانية كرتين بيضاوين أو نسحب في السحبة الأولى كرة بيضاء وكرة حمراء وفي السحبة الثانية كرة بيضاء وكرة حمراء .

$$p(X=1)=\frac{2C_3^2\cdot C_4^2+C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_2^1\cdot C_3^1}{210}=\frac{18}{35}$$

■ $X=2$ لما نسحب في السحبة الأولى كرة بيضاء وكرة حمراء ونسحب في السحبة الثانية كرتين حمراوين ومنه :

$$p(X=2)=\frac{C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_3^2}{210}=\frac{6}{35}.$$

■ $X=3$ لما نسحب في السحبة الأولى كرتين حمراوين ونسحب في السحبة الثانية كرتين حمراوين . $p(X=3)=\frac{C_4^2\cdot C_2^2}{210}=\frac{1}{35}$

$$E(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{6}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{33}{35}$$

حل التمرين 15

1- كل نتيجة تعتبر ترتيبه لـ 4 عناصر مختارة من بين 10 عناصر ، إذن عدد النتائج الممكنة هو : $A_{10}^4=10\times9\times8\times7=5040$.

2- العدد المكون من 4 ارقام لا يبدأ بـ 0 وشكله : $abcd$ حيث الرقم a يختار من بين 9 أرقام لانه غير معدوم ، والرقم b يختار من بين 9 أرقام لانه بعد السحبة الاولى يبقى في الكيس 9 أرقام ، والعدد c يختار من بين8 أرقام وأخيرا العدد d يختار من بين 7 أرقام ومنه عدد المكون من 4 أرقام هو : $9\times9\times8\times7=4536$ ويكون احتمال الحصول على عدد مكون من 4 أرقام هو: $\frac{4536}{5040}=0,9$.

3- أ- القيم التي يأخذها المتغير X هي : $50, 30, 20-, 30-$

ب- $X=-30$ (يخسر $30DA$) إذا تحصلنا على عدد مكون من ثلاثة أرقام أي : $0abc$. لدينا اختيار واحد للرقم0 و 9 اختيارات للرقم a و 8 اختيارات للرقم b و7 اختيارات للرقم c إذن عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام هو : $1\times9\times8\times7=504$ ومنه :

$$p(X=-30)=\frac{504}{5040}=\frac{1}{10}.$$

$X=-20$ لما نحصل على عدد $a\times\times\times$ حيث الرقم a يختار من الأرقام 1، 2، 3 ، 4 والرقم الثاني (مئات) يختار من بين9 أرقام والرقم الثالث (عشرات) يختار من بين8 أرقام ورقم الوحدات يختار من بين 7 أرقام إذن عدد الأعداد من هذا النوع هو :

$4\times9\times8\times7=2016$ ومنه : $p(X=-20)=\frac{2016}{5040}=\frac{4}{10}$

$X=30$ لما نحصل على عدد من 4 أرقام من الشكل $b\times\times\times$ حيث b يختار من بين الأرقام 5، 6، 7 ، 8 ويكون عدد الأعداد من هذا النوع هو $4\times9\times8\times7=2016$ ومنه : $p(X=30)=\frac{2016}{5040}=\frac{4}{10}$.

$X=50$ لما نحصل على عدد من الشكل $9\times\times\times$ ويكون عدد الأعداد من هذا النوع هو : $1\times9\times8\times7=504$ ومنه :

$$p(X=50)=\frac{504}{5040}=\frac{1}{10}.$$

$$E(X)=-30\times\frac{1}{10}+(-20)\times\frac{4}{10}+30\times\frac{4}{10}+50\times\frac{1}{10}=6$$

حل التمرين 16

1- الجداء xy هو من مضاعفات العدد 5 إذا وفقط إذا كان أحد العاملين x أو y هو من مضاعفات 5 . لدينا 5 أرقام ليست من مضاعفات 5 واحتمال الحصول على واحد منهم هو $\frac{5}{6}$. يكون الجداء xy ليس من مضاعفات 5 عندما يكون الرقمين x و y ليس من مضاعفات 5 ، إذن احتمال أن يكون الجداء xy ليس من مضعفات 5 هو $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$.

ويكون احتمال الحصول على الجداء xy من مضاعفات 5 هو :

$1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$ (احتمال حادثة عكسية) .

يمكن استعمال الجدول لمعرفة عدد الجداءات التي هي من مضاعفات5

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

نلاحظ من الجدول أنه توجد 11 ثنائية $(x;y)$ تحتوي الرقم5 أي أن

الجداء xy من مضاعفات 5 . نعلم أن لما نرمي نردين معا نحصل على 36 نتيجة (ثنائية) إذن احتمال أن يكون الجداء xy من مضاعفات 5 هو : $p=\frac{11}{36}$ واحتمال أن يكون xy ليس من مضاعفات 5 هو $q=1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}$

2- أ إذا كررنا n مرة مستقلة رمية النردين معا نحصل على نموذج مخطط برنولي قانونه الثنائي $B\left(n,\frac{11}{36}\right)$ ونعبر عنه بـ :

$$p(X=k)=C_n^k\left(\frac{11}{36}\right)^k\left(\frac{25}{36}\right)^{n-k}$$ مع $k\in\{0;1;...;n\}$

ويمثل k عدد مرات الحصول على الجداء xy من مضاعفات 5 .

الاحتمال p_n للحصول على الأقل مرة واحدة xy من مضاعفات 5 هو $p(X\ge 1)$ وهو يساوي $p_n=p(X\ge 1)=1-p(X=0)$

(الحادثة $(X=0)$ تمثل الحادثة العكسية للحادثة $(X\ge 1)$

نعلم أن $p(X=0)=C_n^0\left(\frac{11}{36}\right)^0\left(\frac{25}{36}\right)^{n-0}=\left(\frac{25}{36}\right)^n$ ومنه :

$p_n=p(X\ge 1)=1-\left(\frac{25}{36}\right)^n$. ب- $1-\left(\frac{25}{36}\right)^n\ge 0,99$

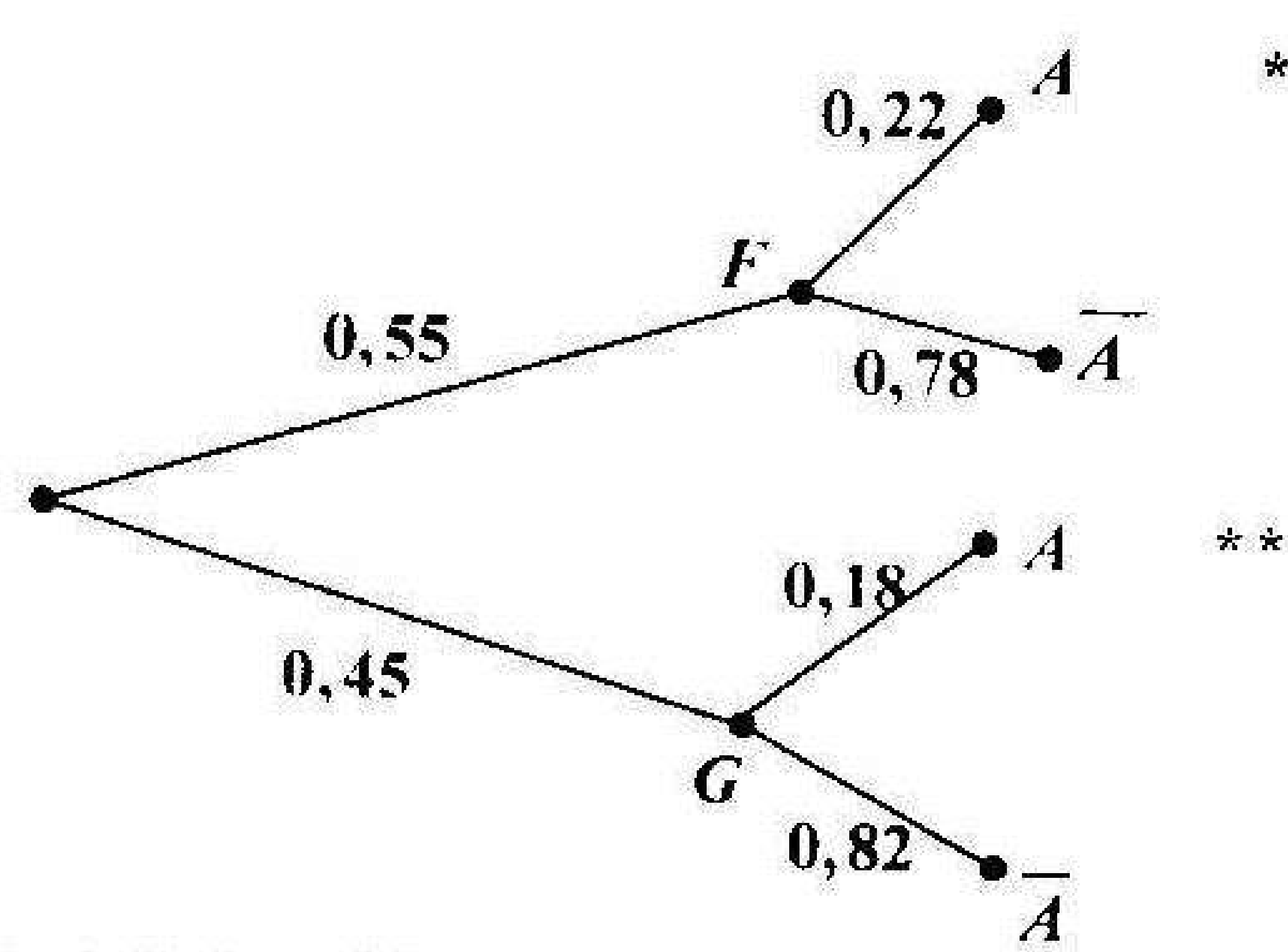
ومنه $\left(25/36\right)^n\le 0,01$ وباستعمال اللوغارتم النبيري(ln)

نجد $0,36n\ge 4,6$ ومنه $n\ge 12,77$ إذن $n=13$.

حل التمرين 17

نرمز بـ F : للتلميذة (أنثى) و بـ G : للتلميذ (ذكر)

وبـ A : التلميذ يدرس الألمانية .



أـ من المعطيات أو من شجرة الاحتمالات نلاحظ أن احتمال أن التلميذ المختار يدرس الألمانية علما أنه ذكر هو $p_G(A)=0,18$.

ب- احتمال أن التلميذ المختار يدرس الألمانية وهو ذكر :

$p(G\cap A)=p(G)\cdot p_G(A)=0,45\times 0,18=0,081$.

جـ - نلاحظ من شجرة الاحتمالات أن لدينا مسارين * و ** تؤديان إلى الحادثة A " التلميذ المختار يدرس الألمانية " ومنه

$p(A)=(0,55\times 0,22)+(0,45\times 0,18)=0,202$.

يمكن استعمال طريقة أخرى لحساب $p(A)$ وهي دستور الاحتمالات الكلية لأن الحادثتان F و G تشكلان تجزئة لمجموعة التلاميذ

$$p(A)=p(A\cap F)+p(A\cap G)=$$

$$=p(F)\cdot p_F(A)+p(A\cap G)=$$

$$= (0,55 \times 0,22) + 0,081 = 0,202$$

2) هذه التجربة هي نموذج مخطط برنولي"وسيطاه :
$n = 5$ و $p = 0,202$ ونعبر عنه بالقانون الثنائي كما يلي :

$p(X = k) = C_5^k (0,202)^k \cdot (1 - 0,202)^{5-k}$ مع

$k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ حيث k يمثل عدد التلاميذ يدرسون الألمانية

أ- احتمال أن لأحد من التلاميذ المختارين يدرسون الألمانية هو :

$$p(X = 0) = C_5^0 (0,202)^0 (1 - 0,202)^5 = (0,798)^5 = 0,323$$

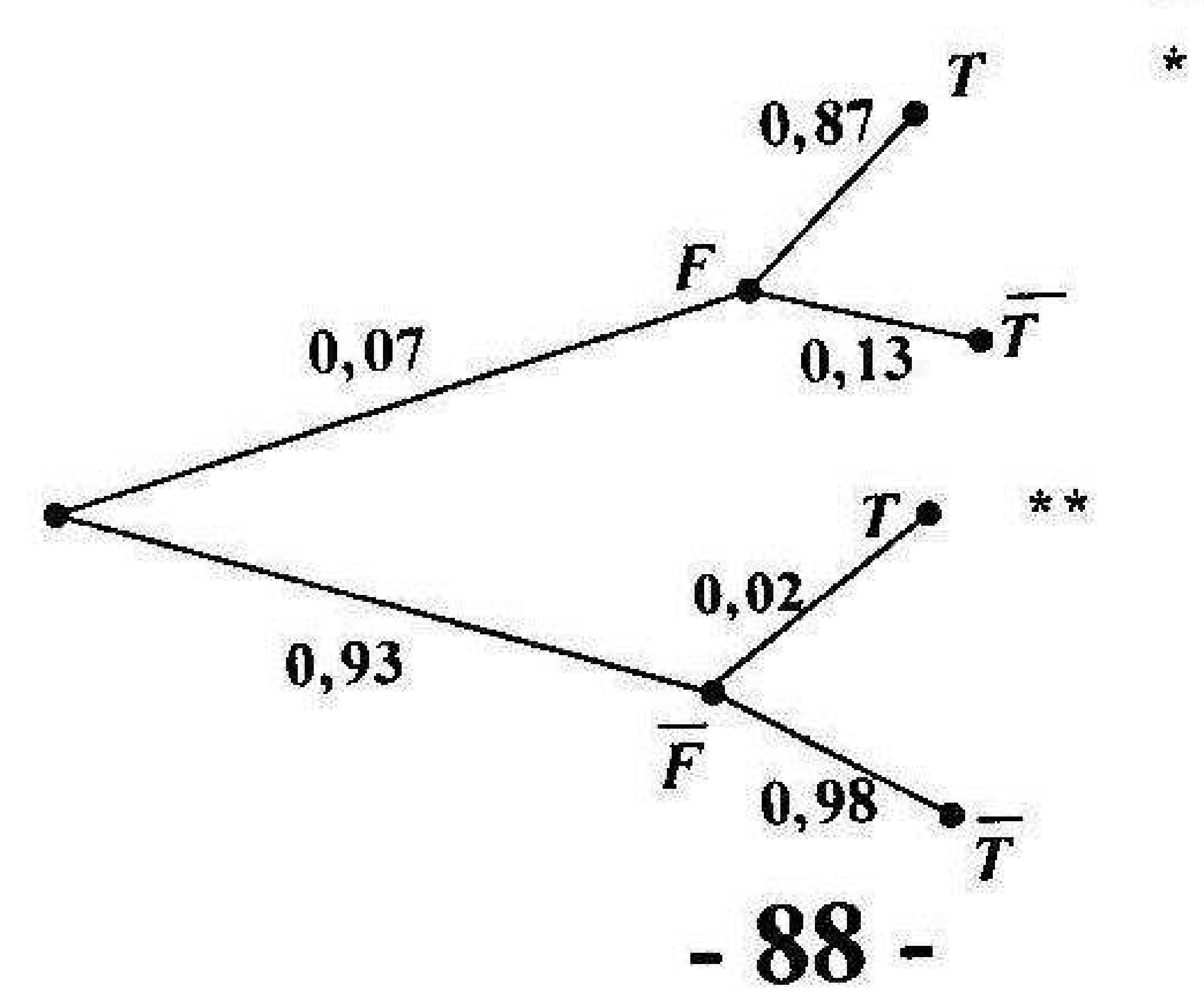
ب- احتمال أن التلاميذ الخمسة المختارين يدرسون الألمانية هو :

$$p(X = 5) = C_5^5 (0,202)^5 (1 - 0,202)^{5-5} = (0,202)^5 = 0,0003$$

جـ - احتمال كي يكون 3 تلاميذ فقط من بين الخمسة المختارين يدرسون الألمانية هو :

$$p(X = 3) = C_5^3 (0,202)^3 (1 - 0,202)^{5-3} =$$
$$= 10 (0,202)^3 (0,798)^2 = 0,0525$$

حل التمرين 18



لدينا حسب المعطيات :

$$p(F) = 0,07 \quad , \quad p_F(T) = 0,87 \quad , \quad p_{\overline{F}}(\overline{T}) = 0,98$$

-1 $p(F \cap T) = p(F) \cdot p_F(T) = 0,07 \times 0,87 = 0,0609$

$$p(\overline{F} \cap \overline{T}) = p(\overline{F}) \cdot p_{\overline{F}}(\overline{T}) = (1 - 0,07) \times 0,98 = 0,911$$

$$p(F \cap \overline{T}) = p(F) \cdot p_F(\overline{T}) = 0,07 \times (1 - 0,87) = 0,009$$

-2 F و $\overline{F}$ تشكلان تجزئة لسكان هذا البلد ومنه بتطبيق" دستور الاحتمالات الكلية" :

$$p(T) = p(T \cap F) + p(T \cap \overline{F}) = 0,0609 + p(\overline{F}) \cdot p_{\overline{F}}(T) =$$
$$= 0,0609 + 0,93 (1 - 0,98) = 0,0795$$

يمكن استعمال شجرة الاحتمالات للوصول إلى هذه النتيجة، الاحتمال $p(T)$ هو مجموع الاحتمالين للمسارين * و ** المؤدين إليه .

-3 احتمال كي شخص له تحليل طبي سلبي يكون مريض هو الاحتمال الشرطي : احتمال الحادثة F علما أن الحادثة $\overline{T}$ محققة أي $p_{\overline{T}}(F)$

ومنه : $p_{\overline{T}}(F) = \dfrac{p(F \cap \overline{T})}{p(\overline{T})} = \dfrac{0,009}{1 - 0,079} = \dfrac{9}{921}$

حل التمرين 19

-1 أ- الآلة M_1 أنتجت $\dfrac{2}{3}$ من الإنتاج الكلي والآلة M_2 أنتجت $\dfrac{1}{3}$ المتبقي ومنه : $p(A) = \dfrac{2}{3}$ و $p(B) = \dfrac{1}{3}$.

ب- بالنسبة للآلة M_1 احتمال الحصول على قطعة صالحة هو $0,9$ وبالنسبة للآلة M_2 هذا الاحتمال هو $0,95$ إذن :

$p_{M_2}(S)=0,95$, $p_{M_1}(S)=0,9$. اللآتين M_1 و M_2 تشكل تجزئة للإنتاج الكلي للورشة وحسب دستور الاحتمالات الكلية :

$$p(S)=p(S\cap M_1)+p(S\cap M_2)=$$

$$=p(M_1)\cdot p_{M_1}(S)+p(M_2)\cdot p_{M_2}(S)=$$

$$=\frac{2}{3}\times 0,9+\frac{1}{3}\times 0,95=\frac{2,75}{3}=\frac{11}{12}$$

$p(S)$ يمثل احتمال صنع قطعة صالحة من طرف هذه الورشة .

2- المتغير العشوائي الذي يساوي عدد القطع الصالحة المصنوعة من طرف الورشة في عينة تحتوي 7 قطع يتبع قانون الثنائي الذي وسطاه $n=7$ و $p=\frac{11}{12}$ ونعبر عنه بالقانون الآتي :

$$p(X=k)=C_7^k\left(\frac{11}{12}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{7-k}$$ مع $k\in\{0,1,...,7\}$

ويمثل k عدد القطع الصالحة في العينة . أ- احتمال بأن لا توجد في هذه العينة أية قطعة غير صالحة هو $p(X=7)$.

$$p(X=7)=C_7^7\left(\frac{11}{12}\right)^7\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{7-7}=\left(\frac{11}{12}\right)^7=0,54$$.

ب- احتمال بأن العينة تحتوي بالضبط 6 قطع صالحة هو $p(X=6)$

$$p(X=6)=C_7^6\left(\frac{11}{12}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{7-6}=7\left(\frac{11}{12}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{12}\right)=0,34$$

جـ - العينة تحتوي على الأقل قطعتين غير صالحتين يعني يوجد في العينة 2 ، 3، ....، 7 قطع غير صالحة وتكون بالمقابل القطع الصالحة 5، 4 ، 3 ، ...،0 ونعبر عن هذه الحادثة بـ : $X\le 5$. إذن الاحتمال المطلوب هو $p(X\le 5)$ ونعلم أن الحادثة العكسية لـ $X\le 5$ هي الحادثة التي تمثل $X>5$ ومنه :

$$P(X\le 5)=1-p(X>5)=1-\left[p(X=6)+p(X=7)\right]=$$

$$=1-(0,34+0,54)=0,12$$

حل التمرين 20

I. 1 – أ- سحب كرة من كل لون يعني سحب كرة زرقاء وكرة بيضاء وكرة حمراء : $p(A)=\frac{C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{4\times 3\times 3}{120}=\frac{3}{10}$

الكرات الثلاثة تحمل نفس الرقم يعني تكون تحمل الرقم 1 أو الرقم2 .

$p(B)=\frac{C_6^3+C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{20+4}{120}=\frac{1}{5}$. الحادثة $(A\cap B)$ تعني أن الكرات المسحوبة لها نفس اللون وتحمل نفس الرقم وهي تمثل 3 كرات بيضاء تحمل الرقم 1 . $p(A\cap B)=\frac{C_3^3}{120}=\frac{1}{120}$.

$$p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{1}{120}\div\frac{3}{10}=\frac{1}{120}\cdot\frac{10}{3}=\frac{1}{36}$$

ب- لدينا $p(A\cap B)=\frac{1}{120}$ و $p(A)\cdot p(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{50}$

بما أن $p(A\cap B)\neq p(A)\cdot p(B)$ فالحادثتان A و B غير مستقلتان . جـ - لنرمز بـ E للحادثة : من بين الكرات الثلاثة المسحوبة توجد كرتان زرقاوان، فيكون احتمال الحادثة C هو الاحتمال $p_B(E)$ ومنه : $p(C)=p_B(E)=\frac{p(E\cap B)}{p(B)}$

الحادثة $(E\cap B)$ تمثل الكرات الثلاثة المسحوبة تحمل نفس الرقم منها اثنان زرقاء ، إذن تكون هذه الحادثة محققة لما نسحب كرتان زرقاوان تحملان الرقم 1 وكرة بيضاء تحمل الرقم1 أو كرتان زرقاوان تحملان الرقم 1 وكرة حمراء تحمل الرقم1 .

$$p(E\cap B)=\frac{C_2^2\cdot C_3^1+C_2^2\cdot C_1^1}{120}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

$$p(C)=\frac{p(E\cap B)}{p(B)}=\frac{1}{30}\div\frac{1}{5}=\frac{1}{30}\times\frac{5}{1}=\frac{1}{6}$$

II. 1- نحصل على ثلاثي ألألوان يعني سحب كرة من كل لون ومنه احتمال الحادثة T_1 (السحبة الأولى) هو : $p(T_1)=\frac{C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$.

بعد السحبة الأولى (ثلاثي ألألوان) يبقى في الصندوق 7 كرات : 3 بيضاء ، 2 زرقاء ، 2 حمراء . احتمال الحصول على ثلاثي ألألوان في السحبة الثانية T_2 علما أن السحبة الأولى T_1 محققة هو :

$$p_{T_1}(T_2)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1}{C_7^3}=\frac{12}{35} .$$

ومنه : $p(T_1\cap T_2)=p(T_1)\cdot p_{T_1}(T_2)=\frac{3}{10}\times\frac{12}{35}=\frac{18}{175}$

بعد السحبتين الأولى والثانية يبقى في الصندوق 4 كرات : 2 بيضاء ، 1 زرقاء ، 1 حمراء ومنه :

$$p_{T_1\cap T_2}(T_3)=\frac{C_2^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1}{C_4^3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$p(T_1\cap T_2\cap T_3)=p(T_1)\cdot p_{T_1}(T_2)\cdot p_{T_1\cap T_2}(T_3)=\frac{18}{350}$$

حل التمرين 21

I. 1- بما أن السحب على التوالي وبإرجاع فيكون عدد عناصر مجموعة الإمكانيات هو n^p حيث يمثل n عدد الكرات في الكيس و p عدد الكرات المسحوبة على التوالي ، إذن عدد الإمكانيات هو $25=5^2$.

أ- احتمال الحصول على كرتين حمراوين هو : $p(A)=\frac{3^2}{25}=\frac{9}{25}$

ب- احتمال الحصول على كرتين مختلفتين اللون هو سحب كرة حمراء وكرة سوداء بهذا الترتيب أو سحب كرة سوداء وكرة حمراء بالترتيب

ومنه : $p(C)=\frac{C_3^1\times C_2^1+C_2^1\times C_3^1}{25}=\frac{3\times 2+2\times 3}{25}=\frac{12}{25}$

2- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي : 0 ، 1 ، 2 .

$X=0$ ، لما نسحب كرة حمراء في السحبة الأولى وأيضا في السحبة الثانية ومنه : $p(X=0)=p(A)=\frac{9}{25}$.

$X=1$ ، لما نسحب كرتين مختلفتين في اللون : $p(X=1)=\frac{12}{25}$

$X = 2$ ، لما نسحب كرة سوداء في السحبة أولى وأيضا في السحبة الثانية ومنه : $p(X=2) = \left(\frac{2}{25}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

- لما نعيد التجربة السابقة 5 مرات متتالية ومستقلة فنحصل على نموذج مخطط برنولي وسيطاه : $n = 5$ و $p = \frac{9}{25}$ ونعبر عنه بـ :

$$p(X=k) = C_5^k \left(\frac{9}{25}\right)^k \left(\frac{16}{25}\right)^{5-k}$$ حيث $k \in \{0,1,...,5\}$

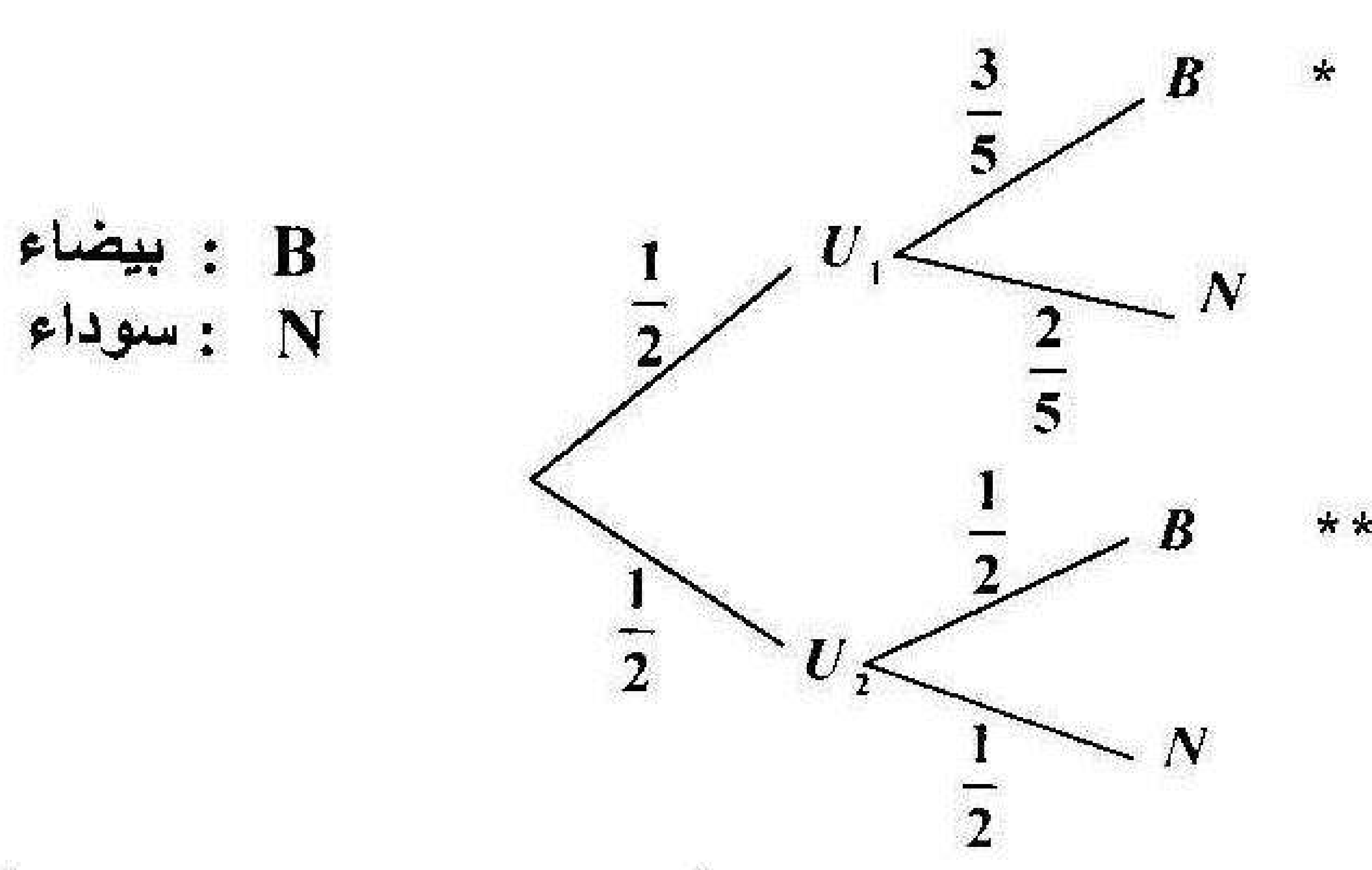
العدد k يمثل عدد مرات التي نحصل فيها على كرتين حمراوين لما نعيد التجربة 5 مرات متتالية . إذن الحصول على كرتين حمراوين 3 مرات لما نعيد التجربة 5 مرات متتالية هو :

$$p(X=3) = C_5^3\left(\frac{9}{25}\right)^3\left(\frac{16}{25}\right)^2 = 10\times\left(\frac{9}{25}\right)^3\left(\frac{16}{25}\right)^2$$

II. 1- للحصول على 3 كرات من نفس اللون نسحب كرتين حمراوين من الصندوق u_1 وكرة حمراء من الصندوق u_2 أو نسحب كرتين سوداوين من u_1 وكرة سوداء من u_2 ويكون الاحتمال المطلوب هو :

$$p = \frac{C_3^2\cdot C_2^1 + C_2^2\cdot C_2^1}{C_5^2\cdot C_4^1} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

2) بما أن اختيار أحد الصندوقين يتم بطريقة عشوائية فيكون : $p(u_1) = p(u_2) = 1/2$.



2- أ من شجرة الاحتمالات نلاحظ أن هناك مسارين * و ** يؤديان إلى الحادثة " سحب كرة بيضاء" ومنه احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء هو : $p(B) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{20}$

ب- الاحتمال المطلوب هو الاحتمال الشرطي : احتمال سحب كرة من u_1 علما أنها بيضاء أي : $p_B(u_1)$ ومنه :

$$p_B(u_1) = \frac{p(u_1)\cdot p_{u_1}(B)}{p(B)} = \left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\right)\div\frac{11}{20} = \frac{6}{11}$$

حل التمرين22

1- احتمال ظهور الرقم 4 عند رمية النرد مرة واحدة هو $\frac{1}{6}$.

إذا اعتبرنا الحادثة S :" ظهور الرقم 4 " والحادثة E : عدم ظهور الرقم 4 فيكون لدينا مخرجين فقط : $p(S) = \frac{1}{6}$ و $p(E) = \frac{5}{6}$.

إذا رمينا النرد 4 مرات متتالية وبطريقة مستقلة فنحصل على نموذج

مخطط برنولي وقانونه الثنائي وسيطاه : $n = 4$ و $p = \frac{1}{6}$ ونعبر عنه كما يلي $p(X=k) = C_4^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$ حيث: $k \in \{0,1,...,4\}$

العدد k يمثل عدد مرات ظهور الرقم 4 ، إذن احتمال ظهور العدد4 ثلاثة مرات هو : $p(X=3) = C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{4-3} = \frac{5}{324}$.

2- نعتبر الحادثة A : ظهور الرقم 4 على الأقل مرة واحدة خلال 4 رميات متتالية للنرد وتكون الحادثة العكسية $\overline{A}$: عدم ظهور الرقم 4 في الرميات الأربعة ومنه :

$$p(\overline{A}) = p(X=0) = C_4^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$$

نعلم أن : $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$.

إذن احتمال ظهور الرقم 4 على الأقل مرة واحدة هو $\frac{671}{1296}$

II. 1- في رمية واحدة للنرد لدينا مجموعة الإمكانيات : $\Omega_1 = \{S;E\}$ وعندما نرمي النرد 4 مرات متتالية تكون مجموعة الإمكانيات هي : $\Omega_4 = \Omega_1^{\,4}$ وعدد عناصرها هي : $2^4 = 16$ وتكون عناصر Ω_4 هي قوائم ذات 4 عناصر : $\Omega_4 = \{(S,E,E,S),...,(S,S,E,S)\}$

- X هو المتغير العشوائي الذي يساوي عدد مرات ظهور الرقم 4 –

عند رمي النرد 4 مرات متتالية فهو يتبع قانون الثنائي $B\left(4;\frac{1}{6}\right)$

ومنه $p(X=k) = C_4^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$ ، ويكون قانون احتمال X معرف كما يلي :

$$p(X=0) = C_4^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$$

$$p(X=1) = C_4^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} = \frac{125}{324}$$

$$p(X=2) = C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{4-2} = \frac{25}{216}$$

$$p(X=3) = C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{4-3} = \frac{5}{324}$$

$$p(X=4) = C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{4-4} = \frac{1}{1296}$$

3- نعلم أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X الذي يتبع قانون الثنائي $B\left(4;\frac{1}{6}\right)$ هو العدد : $E(X) = np = 4\times\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ والتباين للمتغير X هو : $V(X) = np(1-p) = 4\times\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{9}$

حل التمرين23

1- عدد الكرات الذي يحتويها الصندوق هو $(x+3)$ وبما أن السحب في آن واحد فإن عدد النتائج الكلية هو عدد التوفيقات لـ 3 عناصر مختارة من بين $(x+3)$ عنصرا ، إذن عدد الإمكانيات هو :

$C_{x+3}^{2}=\frac{(x+3)(x+2)}{2}$. القيم التي يأخذها X هي: 0 ، 1 ، 2

الحادثة $(X=0)$ هي سحب كرتين سودا وتين إذن :

$$p(X=0)=\frac{C_x^2}{C_{x+3}^2}=\frac{x(x-1)}{(x+3)(x+2)}$$

$$p(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_x^1}{C_{x+3}^2}=\frac{6x}{(x+3)(x+2)}$$

$$p(X=2)=\frac{C_3^2}{C_{x+3}^2}=\frac{6}{(x+3)(x+2)}$$

$$E(X)=0+1\cdot\frac{6x}{(x+3)(x+2)}+2\cdot\frac{6}{(x+3)(x+2)}=$$

$$=\frac{6(x+2)}{(x+3)(x+2)}=\frac{6}{(x+3)}$$

3- حسب المعطيات لدينا $x\geq 2$ و $p(X=0)=p(X=2)$

ومنه $\frac{x(x-1)}{(x+3)(x+2)}=\frac{6}{(x+3)(x+2)}$ و $x\geq 2$

ومنه $x(x-1)=6$ و منه $x=3$ و $x=-2$ (مرفوض)

4- إذا كان $x=3$ فإن احتمال سحب كرتين بيضا وتين هو :

$$p(X=2)=\frac{6}{(x+3)(x+2)}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}\ .$$

لنرمز بـ S للحادثة : سحب كرتين بيضاويين في آن واحد" وبـ E للحادثة :" كل السحبات الأخرى لكرتين في آن واحد وتختلف عن الحادثة S " ويكون لدينا مخرجين فقط : $p(S)=\frac{1}{5}$ و $p(E)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ ونحصل على تجربة من نموذج تجربة برنولي

ليكن المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد مرات سحب كرتين بيضا وتين(في آن واحد) في خمسة سحبات متتالية وبالإرجاع ، فإن X يتبع قانون الثاني بالوسيطين :

$n=5$ و $p=\frac{1}{5}$ ومنه $p(X=k)=C_5^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$ مع

$k\in\{0,1,2,...,5\}$ حيث k يمثل عدد الثنائيات من الكرات البيضاء المسحوبة في 5 سحبات متتالية . احتمال سحب مرة واحدة كرتين بيضاوين $(k=1)$ هو : $p(X=1)=C_5^1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}$

حل التمرين24

I. 1- لتكن الحادثة S :" سحب كرة تحمل الرقم1" والحادثة E : "سحب كرة تحمل رقم يختلف عن 1" وبالتالي لدين مخرجين فقط :

$p(S)=\frac{1}{4}$ و $p(E)=\frac{3}{4}$ وتكون هذه التجربة تلائم تجربة برنولي . وعندما نكرر هذه التجربة 5 مرات متتابعة ومستقلة فالمتغير العشوائي Y يتبع قانون الثنائي بالوسيطين $n=5$ و $p=1/4$ ومنه

$$p(Y=k)=C_5^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}$$ مع $k\in\{0,1,2,...,5\}$

العدد k يمثل عدد الكرات المسحوبة والتي تحمل الرقم1 في الخمس السحبات المتتالية وبالإرجاع .

2- احتمال الحادثة A (الحصول على 4 كرات تحمل الرقم 1) في الخمس سحبات المتتالية هو :

$$p(A)=p(X=4)=C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)=5\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{15}{1024}$$

الحادثة $\overline{B}$ العكسية للحادثة B هي :" سحب أكثر من 4 كرات تحمل الرقم 4 " في الخمس سحبات المتتالية أي : $p(\overline{B})=p(X=5)$

$$p(\overline{B})=p(X=5)=C_5^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^{5-5}=\frac{1}{1024}\ .$$

نعلم أن $p(B)=1-p(\overline{B})=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$.

II. 1- عدد الطرق لسحب كرة من u_1 هو $C_4^1=4$ وعدد الطرق لسحب كرة من u_2 هو $C_5^1=5$ ويكون عدد النتائج الكلية (الثنائيات) هو: $4\times5=20$. لنرمز لكل كرة برقمها ، الكرات الثلاثة للصندوق u_2

التي تحمل الرقم2 نرمز لها بـ : $2,2',2''$ والكرتين اللتين تحملان الرقم 3 بـ : $3,3'$ (للوضوح فقط) .

U_2 \ U_1	1	2	3	4
2	3	4	5	6
2′	3	4	5	6
2″	3	4	5	6
3	4	5	6	7
3′	4	5	6	7

الجدول يعطينا كل المجاميع $X=a+b$ وحسب الجدول فإن X يأخذ القيم : 3، 4 ، 5 ، 6 ، 7 .

$p(X=3)=\frac{3}{20}=0,15$ ، $p(X=4)=\frac{5}{20}=0,25$

$p(X=5)=\frac{5}{20}=0,25$ ، $p(X=6)=\frac{5}{20}=0,25$

$p(X=7)=\frac{2}{20}=0,1$.

$$E(X)=0,15\times3+0,25\times4+0,25\times5+0,25\times6+$$
$$+0,1\times7=4,9$$
$$V(X)=0,15\times3^2+0,25\times4^2+0,25\times5^2+0,25\times6^2+$$
$$+0,1\times7^2-(4,9)^2=1,49$$

الانحراف المعياري للمتغير X هو:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1,49}=1,22$$

حل التمرين25

1- التجربة هي نموذج" مخطط برنولي" والنتيجة المحصل عليها هي نفس النتيجة كرمي قطعة نقدية 5 مرات متتابعة ومستقلة .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد مرات ظهور الوجه ، فهو يتبع قانون الثنائي بالوسطين $n=5$ و $p=\frac{1}{2}$ ومنه احتمال الحصول على 3 مرات الوجه خلال 5 رميات متتابعة هو :

$$p(X=3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}.$$

2- نعلم أن : $np=12$ و $V(X)=np(1-p)=2,4$ ومنه :
$12\times(1-p)=2,4$ ومنه $1-p=2,4\div12=0,2$ ومنه
$p=1-0,2=0,8$. لدينا $np=12$ ومنه $n=12\div0,8=15$.

3- النتيجة المحصل عليها هي نفس النتيجة كرمي نرد واحد n مرة متتالية ومستقلة ، إذن فهذه التجربة هي من نموذج برنولي .
لتكن الحادثة S : " الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي للنرد هو6"
والحادثة E : " عدم ظهور الرقم 6 على الوجه العلوي للنرد"
ومنه $p(S)=\frac{1}{6}$ و $p(E)=\frac{5}{6}$. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد مرات ظهور الرقم 6 خلال n رمية متتالية للنرد، فهو يتبع قانون الثنائي $B\left(n;\frac{1}{6}\right)$. إذن احتمال الحصول على مرة واحدة على الرقم 6 عندما نرمي n مرة متتالية النرد هو :

$$p(X=1)=C_n^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

ب- الحصول على الرقم 6 مرتين على الأقل يعني تحقيق الحادثة $(X\geq2)$ التي حادثتها العكسية هي : $(X<2)$ أي : $(X=1)$ أو $(X=0)$ ونعلم أن :

$$p(X\geq2)=1-\left[p(X=1)+p(X=0)\right]=$$

$$=1-\left[\frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+C_n^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]=1-\frac{n\times5^{n-1}+5^n}{6^n}$$

حل التمرين26

احتمال كتابة حرف متحرك هو $p=\frac{6}{26}=\frac{3}{13}$ واحتمال كتابة حرف ساكن هو $q=1-\frac{3}{13}=\frac{10}{13}$. إذا اعتبرنا الحادثة S :" كتابة حرف متحرك والحادثة E :" كتابة حرف ساكن" فيكون لدينا مخرجين فقط ونحصل على تجربة برنولي . نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الحروف المتحركة خلال ضرب بطريقة عشوائية 6 حروف للآلة كاتبة . المتغيرX يتبع قانون الثنائي $B\left(6;\frac{3}{13}\right)$ ونعبر عنه كما يلي: $p(X=k)=C_6^k\left(\frac{3}{13}\right)^k\left(\frac{10}{13}\right)^{6-k}$ حيث $k\in\{0,1,...,6\}$
k يمثل عدد الحروف المتحركة .

أ- احتمال الحصول على 6 حروف متحركة هو :

$$p(X=6)=C_6^6\left(\frac{3}{13}\right)^6\left(\frac{10}{13}\right)^{6-6}=\left(\frac{3}{13}\right)^6$$

ب- احتمال الحصول على 6 حروف ساكنة هو :

$$p(X=0)=C_6^0\left(\frac{3}{13}\right)^0\left(\frac{10}{13}\right)^{6-0}=\left(\frac{10}{13}\right)^6$$

جـ - احتمال الحصول على 3 حروف متحركة و3 حروف ساكنة هو :

$$p(X=3)=C_6^3\left(\frac{3}{13}\right)^3\left(\frac{10}{13}\right)^{6-3}=20\left(\frac{3}{13}\right)^3\left(\frac{10}{13}\right)^3$$

حل التمرين27

1- احتمال أن يكون شخص زمرته من عامل (-Rhésus) هو :

$$0,07+0,072+0,012+0,005=0,159$$

2- احتمال بأن يكون شخص زمرته A هو :

$p=0,381+0,072=0,453$ واحتمال أن يكون شخص زمرته تختلف عن الزمرة A هو : $q=1-0,453=0,547$.

إذا اعتبرنا الحادثة S : " الشخص زمرته A "

والحادثة E : " الشخص زمرته ليست A " فيكون لدينا مخرجين فقط ونكون أمام تجربة برنولي . ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الأشخاص الذين زمرتهم A من بين العشرة المتبرعين، فهو يتبع قانون الثنائي وسيطاه $n=10$ و $p=0,453$ ونعبر عنه كما يلي :

$$k\in\{0,1,...,10\}\quad p(X=k)=C_{10}^k(0,453)^k(0,547)^{10-k}$$

$$p(X=4)=C_{10}^4(0,453)^4(0,547)^6=210(0,453)^4(0,547)^6$$

3- نعلم أن احتمال أن يكون شخص زمرته O^+ هو $0,37$ و أن احتمال أن تكون زمرة شخص ليست O^+ هو : $1-0,37=0,63$.

نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يساوي عدد المتبرعين الذين زمرتهم O^+ من بين العشرة المتطوعين ، فهو يتبع قانون الثنائي بالوسيطين: $n=10$ و $p=0,37$ ومنه :

$$p(Y=k)=C_{10}^k(0,37)^k(0,63)^{10-k}$$

احتمال أن يكون على الأقل 3 متبرعين زمرتهم O^+ هو $p(Y\geq 3)$

واحتمال الحادثة العكسية هو $p(Y<3)$ ومنه

$$p(Y\geq 3)=1-p(Y<3)$$

$$p(Y<3)=p(Y=0)+p(Y=1)+p(Y=2)$$

$$p(Y=0)=C_{10}^0(0,37)^0(0,63)^{10}=(0,63)^{10}$$

$$p(Y=1)=C_{10}^1(0,37)(0,63)^9=3,7(0,63)^9$$

$$p(Y=2)=C_{10}^2(0,37)^2(0,63)^8=45(0,37)^2(0,63)^8$$

$$p(Y<3)=(0,63)^8\left[(0,63)^2+3,7\times 0,63+45\times(0,37)^2\right]=$$

$$=0,024(0,396+2,331+6,16)=0,22$$

$$p(Y\geq 3)=1-p(Y<3)=1-0,22=0,78$$

حل التمرين28

1- كل تجربة تعطينا مخرجين فقط : O(يفتح الباب) و F (لا يفتح الباب) وتكون مجموعة الإمكانيات هي : $\Omega_1=\{O,F\}$.

نعلم أن $p(O)=\frac{1}{10}$ و $p(F)=\frac{9}{10}$. عندما نكرر هذه التجربة 4 مرات مستقلة تكون مجموعة الإمكانيات هي : $\Omega=\Omega_1^{\,4}$ وعدد عناصرها $2^4=16$ وهي تتمثل في قوائم ذات 4 عناصر :

$\Omega=\{(O,F,F,O),(O,F,O,O),...,\}$.احتمال أن يفتح الباب في التجربة الرابعة هو احتمال الحصول على القائمة (F,F,F,O)

$$p(F,F,F,O)=p(F)\times p(F)\times p(F)\times p(O)=$$

$$=\left(\frac{9}{10}\right)^3\left(\frac{1}{10}\right)=0,0009$$ (لأن التجارب الأربعة مستقلة)

2- في الطريقة الثانية يقوم بتجربة المفتاح دون أن يعيده إلى صرة المفاتيح ويكمل التجربة بالمفاتيح المتبقية . القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي : $\{1,2,3,...,10\}$. لنرمز بـ : F_i " لا يفتحّ الباب في التجربة i " وبـ : O_i يفتح الباب في التجربة i ".

$(X=1)$ يفتح الباب في التجربة الأولى :

$p(X=1)=p(O_1)=\frac{1}{10}$. $(X=2)$ يفتح الباب في التجربة الثانية علما أن التجربة الأولى F_1 قد أجريت(تحققت) .

نعلم أن $p(F_1)=\frac{9}{10}$ وتبقى 9 مفاتيح لإجراء التجربة الثانية O_2

واحتمالها : $p_{F_1}(O_2)=\frac{1}{9}$

$$p(X=2)=p(F_1\cap O_2)=p(F_1)\times p_{F_1}(O_2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$$

$(X=3)$ يفتح الباب في التجربة الثالثة علما أن التجربتين الأولى F_1 والثانية F_2 قد أجريتا . في التجربة الثانية F_2 لديه 9 مفاتيح منها 8 غير صالحة لفتح الباب ومنه : $p_{F_1}(F_2)=\frac{8}{9}$.

في التجربة الثالثة O_3 لديه 8 مفاتيح منها واحد صالح لفتح الباب ومنه $p_{F_1\cap F_2}(O_3)=\frac{1}{8}$ ومنه :

$$p(X=3)=p(F_1\cap F_2\cap O_3)=$$

$$=p(F_1)\times p_{F_1}(F_2)\times p_{F_1\cap F_2}(O_3)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$$

وأيضا من أجل كل k حيث : $k\in\{1,2,3,...,10\}$ فإن :

$p(X=k)=\frac{1}{10}$. الأمل الرياضي للمتغير X هو العدد :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{10}k\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10}\times(1+2+...+10)=\frac{1}{10}\times 55=\frac{11}{2}$$

التباين هو العدد المعرف بـ :

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}k^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2=$$

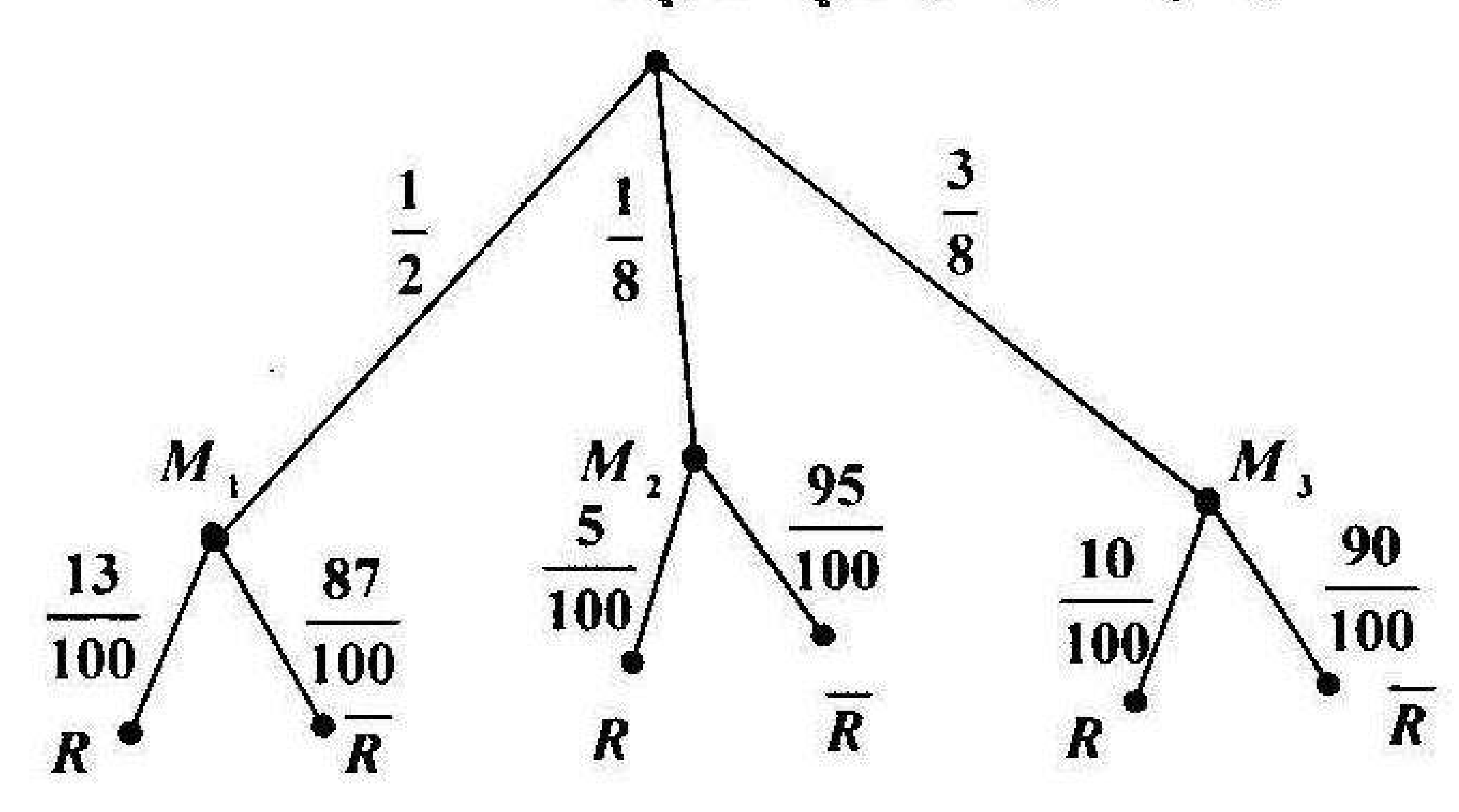
$$=\frac{1}{10}(1+2^2+3^2+...+10^2)-\left(\frac{11}{2}\right)^2=\frac{77}{2}-\frac{121}{4}=\frac{33}{4}$$

ملاحظة : في الحالة الأولى (تجربة المفتاح وإعادته إلى صرة المفاتيح) لو طرحنا السؤال كما يلي : احسب الاحتمال بأن يفتح الباب مرة واحدة في 4 تجارب دون تحديد رتبة الفتح لكان بإمكاننا اعتبار المتغير العشوائي X يساوي عدد مرات يفتح فيها الباب خلال 4 تجارب فهو يتبع قانون الثنائي بالوسيطين $n=4$ و $p=\frac{1}{10}$

ويكون الاحتمال المطلوب $p(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^3$

حل التمرين29

نرمز بـ : R للحادثة : "لون الآلة المختارة أحمر". الشجرة المناسبة لهذه الوضعية هي كالآتي :



1- احتمال بأن تكون الآلة المختارة من النوع M_3 هو :

$p(M_3)=\frac{3}{8}$. لدينا : $p(M_2)=\frac{1}{8}$ و $p(M_1)=\frac{1}{2}$.

2- احتمال أن تكون الآلة المختارة حمراء علما أنها من النوع M_2

هو الاحتمال الشرطي: $p_{M_2}(R)$ ومن المعطيات أو شجرة الاحتمالات

نلاحظ أن : $p_{M_2}(R)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$.

3- الحادثة $\overline{R}$ تمثل" لون الآلة المختارة ليس أحمر" ومن شجرة الاحتمالات نلاحظ أن المسارات المؤدية إلى الحادثة $\overline{R}$ هي ثلاثة ومنه

$$p(\overline{R})=\left(\frac{1}{2}\times\frac{87}{100}\right)+\left(\frac{1}{8}\times\frac{95}{100}\right)+\left(\frac{3}{8}\times\frac{90}{100}\right)=\frac{713}{800}$$

يمكن أيضا استعمال دستور الاحتمالات الكلية لإجابة على هذا السؤال لأن M_1,M_2,M_3 تشكل تجزئة للمخزن ومنه :

$$p(\overline{R})=p(M_1\cap\overline{R})+p(M_2\cap\overline{R})+p(M_3\cap\overline{R})=$$

$$p(M_1)\cdot p_{M_1}(\overline{R})+p(M_2)\cdot p_{M_2}(\overline{R})+p(M_3)\cdot p_{M_3}(\overline{R})=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{87}{100}\right)+\left(\frac{1}{8}\times\frac{95}{100}\right)+\left(\frac{3}{8}\times\frac{90}{100}\right)=\frac{713}{800}$$

4- الاحتمال المطلوب هو الاحتمال الشرطي $p_R(M_1)$ ومنه :

$$p_R(M_1)=\frac{p(M_1\cap R)}{p(R)}=\frac{p(M_1)\cdot p_{M_1}(R)}{p(R)}=\frac{1/2\times 13/100}{87/100}$$

حل التمرين30

1- لتكن الحادثة A : الرامي يصيب المنطقة2 والحادثة B: الرامي يصيب المنطقة1 والحادثة C : الرامي لا يصيب إطلاقا الهدف .

الحادثة C هي الحادثة العكسية للحادثة $(A\cup B)$ ومنه :

. $p(C)=1-p(A\cup B)$ بما إن $A\cap B=\varnothing$ فإن :

ومنه $p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

$p(C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 2- حسب المعطيات فالرامي يسجل نقطتين إذا أصاب المنطقة 2 ويسجل نقطة واحدة إذا أصاب المنطقة 1 و0 نقطة إذا لم يصيب الهدف إطلاقا . الجدول ألآتي يعطينا كل الحالات

الحادثة	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
عدد نقاط الرمية1	2	2	2	1	1	1	0	0	0
عدد نقاط الرمية 2	2	1	0	2	1	0	2	1	0
قيم X	4	3	2	3	2	1	2	1	0

الحادثة A_1 تمثل : الرامي أصاب المنطقة 2 في الرمية 1 و الرمية 2

الحادثة A_2 تمثل : الرامي أصاب المنطقة 2 في الرمية 1 وأصاب المنطقة 1 في الرمية 2 . الحادثة A_9 تمثل الرامي لم يصيب الهدف في الرميتين 1 و 2 .

القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

ويكون قانون احتمال المتغير العشوائي X معرف كما يلي :

$$p(X=0)=p(A_9)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=\frac{9}{36}$$

$$p(X=1)=p(A_6)+p(A_8)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{36}$$

$$p(X=2)=p(A_3)+p(A_5)+p(A_7)=2\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{36}$$

$$p(X=3)=p(A_2)+p(A_4)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{36}$$

$$.\ p(X=4)=p(A_1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

الأمل الرياضي لـ X هو العدد $E(X)$

$$E(X)=4\times p(X=4)+3\times p(X=3)+2\times p(X=2)+$$
$$+1\times p(X=1)+0\times p(X=0)=$$
$$=4\left(\frac{1}{36}\right)+3\left(\frac{4}{36}\right)+2\left(\frac{10}{36}\right)+\left(\frac{12}{36}\right)+0\times\left(\frac{9}{36}\right)=\frac{4}{3}$$

التباين هو العدد $V(X)$ المعرف كما يلي :

$$V(X)=x_i^{\,2}p_i-\left[E(X)\right]^2=16p(X=4)+9p(X=3)+$$
$$+4p(X=2)+p(X=1)+0\times p(X=0)-\frac{16}{9}=\frac{10}{9}$$

الانحراف المعياري للمتغير X :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$